



مسائل مسابقات ریاضی



با حل



ترجمه : پرویز شهرماری

واسیلی سمینویچ کوشچنکو

مسائل مسابقات ریاضی

(شامل مسائل جبر، حساب، هندسه و مثلثات با حل و جواب)

ترجمه پرویز شهریاری



مؤسسه انتشارات امیرکبیر

تهران، ۱۳۶۹

مطالب این کتاب

مسائل جبر

۱. مسائل مربوط به تشکیل معادله ✓ صفحه ۱۰
۲. تبدیل عبارتهای جبری ✓ ۲۱
۳. معادلات و دستگاههای درجه اول ✓ ۲۹
۴. معادلات درجه دوم. معادلات از درجات بالاتر ✓ ۳۳
۵. معادلات گنگ ✓ ۴۰
۶. دستگاه معادلات از درجات بالاتر ۴۳
۷. اعداد مختلط ۴۸
۸. نامساویها و نامعادلات ✓ ۵۱
۹. تصاعدها ✓ ۵۴
۱۰. معادلات مجهول القوه و معادلات لکاریتمی ۶۷
۱۱. آنالیز ترکیبی و بسط دوجمله‌ای ✓ ۷۷
۱۲. مسائل مختلف ✓ ۸۲

مسائل هندسه

۱۳. مسائل هندسه مسطحه ✓ ۸۸
۱۴. مسائل هندسه فضائی ✓ ۹۷

مسائل مثلثات

۱۵. تبدیلات اتحادی و عبارتهای مثلثاتی ۱۰۴

۱۱۳. ۱۶. تبدیل عبارتهای مثلثاتی به صورت لگاریتمی
۱۱۵. ۱۷. توابع معکوس مثلثاتی
۱۱۷. ۱۸. معادلات و دستگاههای مثلثاتی
۱۲۲. ۱۹. مورد استعمال مثلثات درهندسه مسطحه
۱۲۶. ۲۰. مورد استعمال مثلثات درهندسه فضائی
۱۳۷. ۲۱. مسائل و تمرینهای مختلف

اوراق امتحانی

۱۴۰. ۲۲. مسائل ، قضا یا و سئوالات امتحانات شفاهی
۱۴۹. ۲۳. نمونه‌هایی از کارهای مکاتبه‌ای
۱۶۳. ۲۴. نمونه‌هایی از اوراق امتحانی
۱۷۰. مسائل المپیادهای ریاضی

جواب و حل مسائل

۱۸۶. ۱. مسائل مربوط به تشکیل معادلات
۲۰۷. ۲. تبدیل عبارتهای جبری
۲۲۶. ۳. معادلات و دستگاه معادلات درجه اول
۲۲۷. ۴. معادلات درجه دوم و معادلات از درجات بالاتر
۲۵۲. ۵. معادلات گنگ
۲۶۲. ۶. دستگاه معادلات از درجات بالاتر
۲۸۴. ۷. اعداد مختلط
۲۸۷. ۸. نامساویها و نامعادلات
۲۹۴. ۹. تصاعدها
۳۳۵. ۱۰. معادلات مجهول القوه و معادلات لگاریتمی
۳۷۰. ۱۱. آنالیز ترکیبی و بسط دوجمله‌ای
۳۸۰. ۱۲. مسائل مختلف

- ۳۸۳ . مسائل هندسه مسطحه
- ۴۱۸ . مسائل هندسه فضائی
- ۴۴۴ . تبدیلات اتحادی در عبارتهای مثلثاتی
- ۴۵۹ . تبدیل عبارتهای مثلثاتی به صورت لگاریتمی
- ۴۶۶ . توابع معکوس مثلثاتی
- ۴۶۷ . معادلات مثلثاتی
- ۵۰۱ . مسائل هندسه مسطحه به کمک مثلثات
- ۵۱۶ . مسائل هندسه فضائی به کمک مثلثات

روابط مهم

۵۶۸ ✓	جبر
۵۷۳	هندسه
۵۸۶ ✓	مثلثات

مسائل

§ ۱. مسائل مربوط به تشکیل معادله

۱. برای شماره گذاری صفحات يك كتاب لغت ۶۸۶۹ رقم بکاررفته است. تعداد صفحات کتاب را پیدا کنید .

۲. چند دروگر باید دومزرعه را درو کنند ، آنها ازصبح روی مزرعه بزرگتر شروع بکار کردند ، بعد از نصف روز کار بدو قسمت شدند ؛ نصف دروگران روی مزرعه اول باقی ماندند و آنرا تا عصر باآخر رساندند وبقیه شروع به درو مزرعه دوم ، که نصف مزرعه اول است ، کردند . اگر بدانیم در جریان روز بعد تنها يك دروگر برای اتمام کار در مزرعه دوم کافی است ، تعداد دروگرها را پیدا کنید . (مسئله از ل. ن. تولستوی)

۳. در جواب این سؤال که پسر ت چند سال دارد ، پدر جواب داد : اگر سن او را دو برابر کنیم و سه برابر سن ۶ سال قبل او را از آن کم کنیم ، سن کنونیش بدست می آید .

۴. سن شخصی در سال ۱۸۸۷ مساوی مجموع ارقام سال تولدش بوده است . این شخص چند سال داشته است ؟

۵. اگر رشته اعداد طبیعی را از ۱ تا ۱۰۰ درهم ضرب کنیم ، درست راست عدد حاصل چند صفر وجود خواهد داشت ؟

۶. کسر غیر ممکن التحویلی را پیدا کنید که اگر ۶ واحد به صورت ۱۵ واحد به مخرج آن اضافه کنیم ، حاصل کسر تغییر نکند .

۷. از عدد ۹۸۹۹۱۰۰ ۹۸۹۹۱۰۱۱۰۰۰۰ ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۰۰۰۰ ، تعداد ۱۰۰ رقم را حذف کنید ، بطوریکه عدد حاصل ، بزرگترین عدد ممکن باشد .

۸. ثابت کنید که اگر دو عدد صحیح را بر تفاضل آنها تقسیم کنیم ،
باقیمانده‌ها برابر می‌شوند و خارج قسمت‌ها يك واحد اختلاف پیدا می‌کنند .
۹. دو عدد مثبت پیدا کنید ، که اگر حاصلضرب آنها را بهر يك از دو
عدد اضافه کنیم ، مکعب کامل شود . (مسئله دیوفانت)
۱۰. مطلوب‌ست کوچکترین عددی که هم‌ارقام آن واحد بوده و بر عدد
 $333...3$ (صد رقم) قابل‌قسمت باشد .
۱۱. سه عدد مثبت پیدا کنید که به تصاعد هندسی بوده و بیک اندازه از
عددهای a و b و c بزرگتر باشند (بحث) .
۱۲. سه عدد صحیح و مثبت چنان پیدا کنید که مجموع هر سه عدد و همچنین
مجموع هر دو عدد ، مجذور کامل باشد (مسئله دیوفانت)
۱۳. رشته اعداد فرد را که از واحد شروع شده‌اند به گروه‌هایی تقسیم
کرده‌ایم ، بنحوی که تعداد جملات در گروه‌های متوالی، رشته اعداد طبیعی
را تشکیل دهند . ثابت کنید مجموع اعداد هر گروه برابر است با مکعب تعداد
جملات آن (مسئله نیکوماک)
۱۴. دو عدد پیدا کنید ، بطوریکه مجموع ، تفاضل و حاصلضرب آنها
بر نسبت $5:1:18$ باشد .
۱۵. دو عدد صحیح و مثبت پیدا کنید که تفاضل مربعات آنها مساوی
 133 باشد .
۱۶. عدد دو رقمی پیدا کنید که سه برابر مجموع ارقامش باشد و اگر
مجموع ارقامش را مجذور کنیم ، سه برابر عدد بدست آید .
۱۷. چهار عدد پیدا کنید که تشکیل يك تناسب هندسی بدهند و مجموع
طرفین آنها $2S$ ، مجموع وسطین آنها $2S_1$ و مجموع مربعات هر چهار عدد
مساوی $4c^2$ باشد .
۱۸. $4n$ عدد مثبت وجود دارد ، بطوریکه هر چهار عدد مختلف
دلخواه آن تشکیل يك تصاعد هندسی میدهند. ثابت کنید که بین این $4n$ عدد،
هر n عدد با هم برابرند .
۱۹. عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار در هر شبانه روز چند مرتبه
با هم زاویه قائمه می‌سازند ؟

۲۰. چند دقیقه بعد از ساعت ۹ ، عقربه دقیقه شمار به عقربه ساعت-

شمار میرسد ؟

۲۱. سگی از نقطه A ، روباهی را که در نقطه B و فاصله ۳۰ متری او قرار دارد ، تعقیب می کند. هر جست سگ ۲ متر و هر جست روباه ۱ متر است. در فاصله زمانی که روباه سه جست می زند ، سگ دو جست میزند ، در چه فاصله ای از A ، سگ به روباه میرسد ؟

۲۲. کتاب فروشی ۹۰٪ قیمتی را که روی جلد کتابها نوشته شده ، پرداخته و بهمان قیمت روی جلد فروخته است . اضافه فروش کتاب فروشی چند درصد بوده است ؟

۲۳. دانش آموزی يك كتاب ۴۸۰ صفحه ای را مطالعه کرده است ، بنحوی که تعداد صفحاتی که در هر روز خوانده یکی بوده است ، اگر او هر روز ۱۶ صفحه بیشتر می خواند ۵ روز زودتر کتاب را تمام می کرد ، دانش آموز کتاب را چند روزه خوانده است ؟

۲۴. دهقانی که از ده خود به ایستگاه راه آهن میرفت ، در ساعت اول ۳ کیلومتر را طی کرد ، ولی حساب کرد که اگر با همین سرعت برود ۴۰ دقیقه بعد از ورود قطار بایستگاه می رسد. بهمین مناسبت بقیه راه را با سرعت ساعتی ۴ کیلومتر طی کرد و ۴۵ دقیقه قبل از ورود قطار ، بایستگاه رسید . فاصله ده تا ایستگاه را پیدا کنید .

۲۵. ماهیگیری که بایک قدرت پارو میزند ، از اسکله در خلاف جریان آب حرکت میکند ، سرعت او بر حسب کیلومتر برابر با ریشه مثبت معادله زیر است:

$$\sqrt{5x} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{3x+1}$$

او همین راه را در مدت ۱ ساعت و ۶ دقیقه و ۴۰ ثانیه برمی گردد . مطلوبست سرعت قایق ماهیگیری در آب ساکن ، بشرطی که سرعت جریان آب رودخانه ۲/۴ کیلومتر در ساعت باشد .

۲۶. يك لوله آب ۲ ساعت و لوله دیگر ۴/۵ ساعت دیرتر از موقعی که هر دو لوله باز باشند ، استخری را پر از آب می کنند . هر يك از دو لوله به تنهایی در چند ساعت استخر را پر می کنند ؟

۲۷. از ایستگاهی که يك قطار باری حرکت می کند ، یک ساعت و نیم بعد قطار مسافری در همان مسیر و با سرعت ۵ کیلومتر بیشتر از سرعت قطار باری راه می افتد . بعد از ۱۵ ساعت نه تنها قطار مسافری از قطار باری جلوتر می افتد ، بلکه ۲۱ کیلومتر هم از آن جلوتر است . سرعت قطار باری را پیدا کنید .

۲۸. دو توریست P و M در یک زمان از نقطه A بطرف نقطه B حرکت کردند. توریست P پیاده و توریست M با موتورسیکلت به رانندگی N . پس از طی مسافتی ، M بقیه راه را پیاده رفت و راننده N برگشت و توریست P را سوار کرد و بطرف B برافزاند . هر دو توریست (M پیاده و P موتورسیکلت سوار) در یک زمان به B رسیدند .

فاصله بین A و B را ۸ کیلومتر ، سرعت پیاده را ۷ کیلومتر در ساعت و سرعت موتورسیکلت را ۷ کیلومتر در ساعت فرض می کنیم . مدتی که توریستها در راه بوده اند حساب کنید .

۲۹. دو کارگر برای انجام کاری مشغول شدند . ابتدا یکی از آنها با اندازه ثلث زمانی که کارگرددوم برای انجام تمام کار به تنهایی لازم دارد ، کار کرد. سپس کارگرددوم با اندازه ثلث زمانی که کارگراول برای انجام کار لازم دارد کار کرد. بعد دیدند که $\frac{13}{18}$ کار انجام شده است. اگر هر دو کارگر با هم کار را در $3\frac{3}{5}$ ساعت با انجام برسانند ، حساب کنید هر يك از کارگرها به تنهایی کار را در چند ساعت تمام می کنند ؟

۳۰. آلیاژی از دو فلز به نسبت ۱:۲ و آلیاژ دیگری از همان فلزات به نسبت ۲:۳ تشکیل شده است . با چه نسبتی این دو آلیاژ را بهم مخلوط کنیم تا آلیاژی از این فلزات به نسبت ۱۷:۲۲ بدست آید ؟

۳۱. ضمن آزمایش صرفه کار در مورد موتور ، از لحاظ قدرت سوخت داخلی ، متوجه شدند که یکی از آنها ۶۰۰ گرم و دیگری که ۲ ساعت کمتر کار کرده است ۳۸۴ گرم بنزین مصرف می کنند. اگر مصرف بنزین موتور اول با اندازه دومی و مصرف بنزین موتور دوم با اندازه اولی بود ، در همین مدت کار ، مصرف هر دو مساوی میشد. هر کدام از موتورها در یک ساعت چند گرم بنزین مصرف میکنند ؟

۳۲. چند گلوله مساوی داریم . میتوانیم آنها را هم بصورت يك مربع

و هم بصورت يك مثلث متساوی الاضلاع پهلوی هم قرار دهیم ، ولی وقتی که بصورت مثلث در آوریم در هر ضلع ۲ گلوله بیش از تعداد گلوله های هر ضلع مربع جامی گیرد . اگر فرض کنیم که گلوله ها نه تنها محیط ، بلکه سطح مربع (و همچنین مثلث) را هم پوشانده باشند ، تعداد گلوله ها را پیدا کنید .

۳۳. دودوچرخه سوار در يك زمان یکی از A و دیگری از B بطرف یکدیگر حرکت کردند و بعد از یک ساعت بهم رسیدند . دوچرخه سوارها بدون توقف و با همان سرعت های قبلی برای خود ادامه دادند ، t ساعت پس از آنکه اولی به نقطه B رسیده بود ، دومی به نقطه A رسید . اگر فاصله بین دو نقطه A و B مساوی s کیلومتر باشد ، سرعت هر يك از دوچرخه سوارها را معین کنید .

۳۴. دو نفر از ده بطرف ایستگاه راه آهن برای افتادند : یکی از آنها در جاده شوسه و با سرعت ساعتی ۷ کیلومتر برای افتاد ، و دیگری راه میان بر را انتخاب کرد و با سرعت ساعتی ۴ کیلومتر یک ساعت زودتر از اولی به مقصد رسید . اگر فاصله ده تا ایستگاه از طریق راه شوسه ۶ کیلومتر بیشتر باشد ، طول راه میان بر را حساب کنید .

ضمناً به بینید بازاء چه مقدار صحیح از ۷ مسئله دارای جواب است ؟
۳۵. دو اتوبوس در یک زمان از دهی بسمت ده دیگر حرکت کردند . اولی که سرعتش ۲ کیلومتر در ساعت بیش از دومی بود ۱۵ دقیقه زودتر به مقصد رسید . اگر فاصله بین دو ده ۳۶ کیلومتر باشد ، سرعت هر يك از دو اتوبوس را پیدا کنید . (بلغارستان)

۳۶. دو آلیاژ طلا و مس یکی با عیار ۹۵۰ و دیگری با عیار ۸۰۰ را با دو کیلو گرم طلای خالص مخلوط کرده ایم ، آلیاژ جدیدی با عیار ۹۰۶ و به وزن ۲۵ کیلو گرم بدست آورده ایم . وزن هر يك از دو آلیاژ اول را بدست آورید .

۳۷. مطلوبست وزن و عیار آلیاژی از نقره و مس ، بشرطی که اگر ۳ کیلو گرم نقره خالص به آن اضافه کنیم عیاری مساوی ۹۰۰ و اگر ۲ کیلو گرم از آلیاژی به عیار ۹۰۰ به آن اضافه کنیم ، عیاری مساوی ۸۴۰ پیدا کند .

۳۸. مبلغی را با نرخ ۲٪ در صندوق پس انداز گذاشته ایم و پس از مدتی بابت اصل و فرع ۸۵۰۲ ریال گرفته ایم . اگر همین مبلغ را با نرخ ۳٪ و

برای یکسال کمتر به صندوق پس انداز می سپردیم ۸۱۹ ریال سود آن میشد .
مطلوبست مبلغ اصلی سرمایه و مدتی که در صندوق پس انداز بوده است .

۳۹. دو بنا ، که دومی $1\frac{1}{4}$ روز بعد از اولی شروع بکار کرده ، مشترکاً
دیواری را در ۷ روز ساخته اند . اگر هر یک از دو بنا به تنهایی کار میکردند ،
بنای اول ۳ روز بیش از بنای دوم وقت لازم داشت . هر یک از بناها چند روزه
ساختمان دیوار را تمام می کنند ؟

۴۰. دو پیاده در یک زمان بطرف هم حرکت کردند و پس از سه ساعت
بهم رسیدند . برای اینکه اولی بقیه راه را طی کند تا به نقطه عزیمت دومی
برسد؛ $2\frac{1}{4}$ ساعت بیشتر وقت لازم دارد تا دومی به نقطه عزیمت اولی برسد.
هر یک از دو نفر طول راه را در چند ساعت طی کرده اند ؟

۴۱. دو پیاده یکی از A و دیگری از B در یک زمان بطرف یکدیگر
حرکت کرده و پس از t ساعت بهم رسیده اند . اگر بدانیم که اولی برای طی
فاصله بین A و B با اندازه h ساعت بیش از دومی در راه بوده است ، هر یک
از دو نفر تمام راه را در چند ساعت طی کرده اند ؟

۴۲. در یک ده برای زمستان احشام a تن علوفه آماده کرده بودند ،
ولی بعلت اینکه b رأس از احشام به ده مجاور منتقل شد ، بهر رأس از احشام
باقیمانده c تن بیشتر رسید. مطلوبست مقدار علوفه ای که برای هر رأس از احشام
در مرحله اول در نظر گرفته بودند .

۴۳. برای تخلیه a تن غله چند کارگر در نظر گرفته شده بود . ولی
چون b کارگر بآنها اضافه شد ، بهر یک از کارگران c تن کمتر رسید ، چند
کارگر مشغول تخلیه غله بوده اند .

۴۴. فاصله بین دو شهر s کیلومتر است . قطار سریع السیر ، که سرعت آن
a کیلومتر بیش از قطار مسافری معمولی است ، این فاصله را t ساعت زودتر
طی می کند .

قطار سریع السیر فاصله دو شهر را در چند ساعت طی می کند ؟

۴۵. قطاری در ایستگاه به اندازه t دقیقه معطل شد. برای اینکه این تأخیر را جبران کند a کیلومتر در ساعت به سرعت خود افزود و در نتیجه به ایستگاه بعدی که در b کیلومتری ایستگاه قبل بود بدون تأخیر رسید. سرعت معمولی قطار را معین کنید.

۴۶. فاصله بین دو نقطه A و B مساوی s کیلومتر است و ضمناً $\frac{2}{3}$ راه جاده آسفالتی است. سرعت اتومبیل در جاده آسفالتی v کیلومتر در ساعت بیش از سرعت آن در جاده خاکی است، اگر اتومبیل تمام فاصله A تا B را در مدت t ساعت طی کرده باشد، سرعت آنرا در قسمت آسفالتی و خاکی پیدا کنید.

۴۷. يك ستون پیاده نظام d کیلومتر طول دارد و با سرعت v کیلومتر در ساعت جلو میرود. فرمانده ستون که بر اسب نشسته از انتهای ستون به ابتدای آن میرود و بعد همین راه را بر میگردد و به انتهای ستون میرسد. اگر رفت و برگشت فرمانده رویهم t دقیقه طول کشیده باشد، سرعت او را، که یکنواخت در نظر گرفته میشود، پیدا کنید.

۴۸. پرنده ای فاصله 40 کیلومتری را در خلاف جهت باد پرواز میکند و سپس همان فاصله را برمی گردد. اگر رفت و برگشت پرنده $2/5$ ساعت طول کشیده باشد و سرعت باد هم 30 کیلومتر در ساعت باشد، سرعت پرنده را در هوای آرام پیدا کنید.

۴۹. موتورسیکلت سواری از شهر A بطرف شهر B و دوچرخه سواری از شهر B بطرف شهر A حرکت کردند. وقتی که بهم رسیدند معلوم شد که دوچرخه سوار a کیلومتر و موتورسیکلت سوار d کیلومتر بیشتر طی کرده اند. پس از ملاقات هر کدام براه خود ادامه دادند و t ساعت بعد از آنکه موتورسیکلت سوار به شهر B رسید، دوچرخه سوار وارد شهر A شد. اگر سرعت موتورسیکلت b کیلومتر در ساعت بیش از دوچرخه باشد. سرعت هر يك را پیدا کنید.

۵۰. مجموع دوسرمایه مساوی 10000 ریال است، اگر نرخ بهره هر سرمایه مساوی $\frac{1}{1000}$ همان سرمایه باشد و مجموع بهره دوسرمایه در یکسال مساوی 580 ریال شود. هر يك از دوسرمایه را پیدا کنید.

۵۱. دومحلول اسیدسولفوریک داریم که در اولی $\frac{5}{8}$ کیلوگرم و در دومی $\frac{5}{6}$ کیلوگرم اسید خالص وجود دارد. این دومحلول را باهم مخلوط کرده ایم، 10 کیلوگرم محلول اسیدسولفوریک بدست آورده ایم. وزن هریک از محلولها را پیدا کنید، بشرطی که بدانیم در محلول اول 10% بیش از دومی اسیدسولفوریک خالص بوده است.

۵۲. اضافه تولید یک کارخانه نسبت بسال قبل $a\%$ و در سال دوم $b\%$ بوده است. اضافه تولید در سال سوم چند درصد باشد تا متوسط اضافه تولید در سه سال مساوی $c\%$ شود.

۵۳. توپی پس از برخورد با زمین باندازه $\frac{2}{3}$ ارتفاع رها شده بطرف بالا بر میگردد. اگر این توپ را از ارتفاع $\frac{8}{1}$ متری بطرف زمین رها کرده باشیم، پس از چند بار برخورد با زمین با ارتفاع $\frac{1}{6}$ متری زمین بر میگردد؟

۵۴. اگر جمعیت یک شهر در هر سال باندازه $\frac{1}{80}$ اضافه شود، پس از چند سال جمعیت آن دو برابر می شود؟

۵۵. تفاضل دوعدد مساوی 48 و تفاضل بین واسطه های حسابی و هندسی دو عدد مساوی 18 می باشد. دوعدد را پیدا کنید.

۵۶. در یک سالن سینما n صندلی وجود دارد، تعداد صندلیها در هر ردیف با هم برابر است و اگر بهر ردیف p صندلی اضافه کنیم، تعداد ردیفها m واحد کم می شود ولی تعداد کل صندلیها ثابت می ماند. چند ردیف صندلی در سینما چیده شده و در هر ردیف چند صندلی وجود دارد؟

۵۷. پیاده ای هر قطعه یک کیلومتری از مسیر تراموا را در 12 دقیقه طی می کند، ضمن حرکت تعداد ترامواهایی را که از کنار او می گذرند و یا از روبرو با او می رسند می شمارد. در جریان یک ماه 45 تراموا از او عبور کرد و 120 تراموا از روبرو با او رسید. سرعت تراموا را پیدا کنید.

۵۸. گلوله ای بشعاع R در کف ظرف استوانه ای قرار گرفته است، بطوریکه سطح آب بر سطح گلوله مماس شده است، اگر بجای گلوله باشعاع R ، گلوله ای باشعاع mR در ظرف می انداختیم باز همین وضع پیش می آمد. مطلوب

است شعاع قاعده ظرف .

ضمناً به بینید بازا چه مقادیری از m مسئله جواب دارد؟

۵۹. شخصی بابت قرض خود (بانرخ ۳٪)، برای هر هزار ریال، سالانه

۹۰ ریال می پردازد . پس از چند سال پرداخت اوتمام خواهد شد ؟

۶۰. در ظرف A به اندازه x لیتر از یک مایع و در ظرف B بهمان اندازه

آب وجود دارد . دولیوان را ، که هر کدام $5/5$ لیتر گنجایش دارد ، با محتوی ظرفهای A و B پر کرده ایم و از ظرف A به ظرف B و برعکس از ظرف B به ظرف A ریخته ایم ، بعد این عمل را دوباره تکرار کرده ایم . اگر پس از عمل دفعه دوم مایع ظرف A با اندازه $5/90\%$ غلظت داشته باشد ، x را پیدا کنید .

۶۱. دولوله آب وارد استخری میشوند . لوله دوم به تنهایی سه ساعت

زودتر از لوله اول استخر را پر می کند . ابتدا لوله اول را باز کرده ایم و پس از

$5\frac{3}{4}$ ساعت لوله دوم را هم باز کرده ایم . بعد از ۱۰ ساعت استخر پر شده است .

هر یک از لوله ها استخر را در چند ساعت پر می کنند ؟

۶۲. آلیاژی از قلع و سرب بوزن ۲۰ کیلو گرم وقتی که در آب غوطه ور

باشد ۲ کیلو گرم وزن خود را ازدست می دهد . می دانیم ۱۰ کیلو گرم قلع در

آب $1\frac{3}{8}$ کیلو گرم وزن خود و ۵ کیلو گرم سرب در آب $\frac{3}{8}$ کیلو گرم وزن خود را

از دست می دهد . در آلیاژ چقدر قلع و چقدر سرب بوده است ؟

۶۳. آلیاژی از ۲ کیلو گرم مس ، $3/7$ کیلو گرم سرب و $1/2$ کیلو گرم

روی درست شده است . اگر وزن مخصوص مس و سرب و روی بترتیب $8/9$ و

$11/4$ و ۷ باشد ، وزن مخصوص آلیاژ را پیدا کنید .

۶۴. کشتی در مدت ۷ ساعت و ۲۰ دقیقه 35 کیلومتر مسافت رودخانه را

می رود و برمی گردد . سرعت جریان آب 4 کیلومتر در ساعت است . سرعت کشتی

را وقتی که در جهت جریان آب و یا برخلاف آن حرکت می کند ، پیدا کنید .

۶۵. در یک کتاب تعداد حروفی که در سطرها ی هر صفحه وجود دارد ،

مقدار ثابتی است . اگر در هر صفحه ۲ سطر بیشتر و در هر سطر ۲ حرف بیشتر باشد ،

تعداد حروف هر صفحه ۱۵۰ عدد زیادتر می شود و اگر تعداد حروف هر سطر ۳ عدد و تعداد سطرهای هر صفحه ۵ عدد کمتر بشود، حروف هر صفحه ۲۸۰ عدد کمتر می شود. تعداد سطرهای هر صفحه و تعداد حروفی که در هر سطر وجود دارد پیدا کنید.

۶۶. دانش آموزی ۳ ریال بیش از دانش آموز دیگر دارد. اولی برای

خرید کتابی $\frac{1}{n}$ و دومی $\frac{1}{3}$ پولش را خرج کرد. دانش آموز دوم چقدر پول داشته است؟ بشرطی که بدانیم اولی ۲ ریال بیشتر خرج کرده است. بازاء چه مقادیر صحیحی از n مسئله دارای جواب است؟

۶۷. دو عدد چنان پیدا کنید که مجموع، حاصل ضرب و تفاضل مربعات آنها با هم برابر باشند.

۶۸. چهار عدد تشکیل تصاعد هندسی داده اند، بطوریکه مجموع اولی و چهارمی مساوی a و مجموع دومی و سومی مساوی b می باشد. مجموع مربعات هر چهار عدد مساوی c^2 است. جمله اول این تصاعد را معین کنید.

۶۹. t سال قبل تعداد درختان جنگلی ۱۰۰۰۰ بوده است و حالا در این جنگل ۱۵۶۰۰ درخت وجود دارد. اگر تعداد درختان در هر سال $\frac{1}{10}$ اضافه شود، t را بدست آورید.

۷۰. در n ساعت، تراکتور با اندازه p هکتار بیش از اسب شخم می کند. معین کنید در n ساعت تراکتور و اسب هر کدام چند هکتار زمین را شخم می کنند، بشرطی که بدانیم تراکتور یک هکتار زمین را t ساعت زودتر از اسب تمام میکند.

۷۱. فاصله بین دو شهر A و B از طریق راه آهن ۶۶ کیلومتر و از طریق آب ۸۰/۵ کیلومتر است. قطار ۴ ساعت بعد از کشتی از A حرکت کرد و ۱۵ دقیقه زودتر به شهر B رسید. سرعت متوسط قطار و کشتی را پیدا کنید، بشرطی که بدانیم سرعت اولی ۳۰ کیلومتر در ساعت بیش از دومی است.

۷۲. دو پیاده یکی از A و دیگری از B بطرف یکدیگر حرکت کردند و پس از t ساعت بهم رسیدند. هر یک از آنها در چه مدت فاصله بین A و B را طی می کنند. بشرطی که بدانیم آنکه از A حرکت کرده d ساعت زودتر از دیگری این فاصله را طی می کند.

۷۳. کارخانه‌ای باید ۴۲۵ قطعه مورد لزوم را تهیه کند و کارخانه دوم در همین مدت ۵۰۰ قطعه. کارخانه اول کار خود را ۴ روز زودتر و کارخانه دوم ۷ روز زودتر از موعد مقرر انجام دادند. هر کارخانه در هر روز چند قطعه تهیه کرده‌اند بشرطی که بدانیم کارخانه دوم هر روز ۵ قطعه بیش از کارخانه اول تهیه کرده است.

۷۴. سه مجرای آب وارد مخزن آبی می‌شوند، اگر مجرای اول و دوم با هم باز باشند، مخزن در ۲ ساعت پر میشود، اگر مجرای اول و سوم باز باشد در ۷۲ دقیقه و اگر مجرای دوم و سوم باز باشد، در $1\frac{1}{۲}$ ساعت. هر یک از مجراها در چند ساعت مخزن آب را به تنهایی پر می‌کنند؟

۷۵. فاصله دو نقطه A و B مساوی ۸ کیلومتر است، دودوچرخه‌سوار در یک جهت از دو نقطه A و B حرکت کردند (در جهت A به B): اولی از نقطه A و با سرعت‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵... کیلومتر در ساعت و دومی از نقطه B و با سرعت‌های ۷ و ۶ و ۵ و ۴... کیلومتر در ساعت. سرعت دودوچرخه‌سوارها در جریان یک ساعت مقداری است ثابت و دودوچرخه-سوار دوم یک ساعت دیرتر از اولی حرکت کرده است.

به بینید پس از چه مدت دودوچرخه‌سوار اولی از دومی عبور میکند.

۷۶. از نقطه A واقع بر محیط دایره‌ای، در یک زمان دو متحرک در خلاف جهت هم شروع به حرکت کردند. پس از مدتی بهم رسیدند و معلوم شد که متحرک اول ۷ سانتیمتر بیش از دومی طی کرده است. پس از برخورد هر کدام براه خود ادامه دادند، متحرک اول بعد از ۴ ثانیه و متحرک دوم بعد از ۷ ثانیه به نقطه A رسیدند. محیط دایره را معین کنید.

۷۷. دواتومبیل در یک زمان یکی از A بطرف B و دیگری از B بطرف A حرکت کردند. پس از برخورد براه خود ادامه دادند و یکی از آنها ۲ ساعت و دیگری $\frac{۹}{۸}$ ساعت بعد به مقصد خود رسیدند. سرعت هر یک از اتومبیلها را پیدا کنید. بشرطی که بدانیم فاصله بین دو نقطه A و B برابر ۲۱۰ کیلومتر است.

§ ۲. تبدیل عبارتهای جبری

عبارتهای زیر را بصورت ضرب تبدیل کنید :

$$(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc \quad .۷۸$$

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 \quad .۷۹$$

$$x^3+5x^2+3x-9 \quad .۸۰$$

$$x^4+x^2+\sqrt{2}x+2 \quad .۸۱$$

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \quad .۸۲$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc \quad .۸۳$$

$$y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y) \quad .۸۴$$

۸۵. عبارت زیر را به ضرب دو عامل تبدیل کنید :

$$(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)^2-x^n$$

$$۸۶. \text{ عبارت } \frac{a}{b}-\frac{b}{a} \text{ را به صورت ضرب دو عامل تجزیه کنید، بطوریکه}$$

$$\text{یکی از آن عوامل برابر } \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \text{ باشد.}$$

$$x^{10}+x^5+1 \quad .۸۷$$

$$\sqrt[3]{a^2b^4}+\sqrt[3]{b^2c^4}+\sqrt[3]{c^2a^4}-(\sqrt[3]{b^4c^2}+\sqrt[3]{c^4a^2}+\sqrt[3]{a^4b^2}) \quad .۸۸$$

عبارتهای زیر را ساده کنید :

$$\frac{a-c}{a^2+ac+c^2} \cdot \frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2} \cdot \left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right) : \quad .۸۹$$

$$: \frac{c(1+c)-a}{bc}$$

$$\left[\frac{(a+x)^r}{ax} - r \right] \cdot \left[\frac{(a-x)^r}{ax} + r \right] : (a^r - x^r) \\ \frac{(a^r x - ax^r) : [(a+x)^r - ax] \cdot [(a-x)^r + ax]}{\times} \quad .90$$

$$\times \frac{a - \frac{ax}{a+x}}{a + \frac{ax}{a-x}}$$

$$\left[1/5 - \left(x^r - \frac{x^r + 1}{x^r + 1} \right) \cdot \frac{x^r - x(4x - 1) - 4}{x^r + 6x^r - x - 6} \right] : \quad .91$$

$$: \frac{x^r + 29x + 78}{3x^r + 12x - 36}$$

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^r + 2a^r : \sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{r\sqrt{ab} - rb}{a-b} \quad .92$$

$$\left\{ \frac{1 + x^{\frac{1}{r}} y^{\frac{1}{r}} (x^r + y^r)^{\frac{1}{r}}}{x^{\frac{1}{r}} y^{\frac{1}{r}} [1 - xy(x^r + y^r)]} \right\}^{-1} \quad .93$$

$$\left(\frac{\sqrt[r]{ax^r} - \sqrt[r]{a^r x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{ax}}{\sqrt[r]{ax}} \right)^{-r} \times \quad .94$$

$$\times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{a}{x} + \frac{a}{x}}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a} - 1+a} \right) \times \quad .95$$

$$(0 < a < 1) \quad \times \left(\sqrt{\frac{1}{a} - 1} - \frac{1}{a} \right)$$

.۹۶

$$\frac{[(a+b)^{-\frac{1}{r}} + (a-b)^{-\frac{1}{r}}]^{-1} + [(a+b)^{-\frac{1}{r}} - (a-b)^{-\frac{1}{r}}]^{-1}}{[(a+b)^{-\frac{1}{r}} + (a-b)^{-\frac{1}{r}}]^{-1} - [(a+b)^{-\frac{1}{r}} - (a-b)^{-\frac{1}{r}}]^{-1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}}(\sqrt{r} + \sqrt{r}) + \quad .97$$

$$+ \frac{\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r}}{\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r}}{\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r}} + \frac{\sqrt{r}}{(\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r})^2} - \frac{\sqrt{r}}{(\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r})^2}$$

$$\frac{(\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r})(\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r})^2 - (\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r})(\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r})^2}{(\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r})(\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r})^2 - (\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r})(\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r})^2}$$

$$\frac{r + \sqrt{r}}{\sqrt{r} + \sqrt{r} + \sqrt{r}} + \frac{r - \sqrt{r}}{\sqrt{r} - \sqrt{r} - \sqrt{r}} \quad .98$$

$$r\sqrt{r + \sqrt{r} - \sqrt{r} + \sqrt{r}} \quad .99$$

.۱۰۰

$$\left[\sqrt[n]{(n^2+1)} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[n]{(n^2-1)} \sqrt[n]{1-\frac{1}{n^2}} \right]^{-2}$$

($n > 1$)

$$\left[\sqrt[n]{\frac{(1-n)\sqrt{1+n}}{n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{r n^2}{r - \lambda n + r n^2}} \right]^{-1} : \quad .101$$

$$: \sqrt[n]{\left(\frac{r n \sqrt{n}}{r \sqrt{1-n^2}} \right)^{-1}} \quad (0 < n < 1)$$

عبارتهای زیر را ساده و محاسبه کنید :

$$\frac{\frac{x}{\lambda y^2} + \frac{1}{4y^2}}{x^2 + 2xy + 2y^2} - \frac{\frac{x}{\lambda y^2} - \frac{1}{4y^2}}{x^2 - 2xy + 2y^2} - \frac{1}{4y^2(x^2 + 2y^2)} \cdot 102$$

$$(y = \sqrt[4]{r}, x = \sqrt[4]{r} \text{ بازا}) + \frac{1}{4y^2(x^2 - 2y^2)}$$

$$(x = \frac{\sqrt{r}}{4} \text{ بازا}) \quad \frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}} + \frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}} \cdot 103$$

$$(x = \sqrt{r} - \sqrt[3]{r} \text{ بازا}) \quad \frac{x^2 - 2x\sqrt{r} - \sqrt[3]{r} + 3}{x - \sqrt{r}} \cdot 104$$

$$\left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{x}} \right)^{-1} \cdot 105$$

$$(x = \sqrt[3]{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2a}} \text{ بازا})$$

$$(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1} \cdot 106$$

$$[b = (2 - \sqrt{r})^{-1}, a = (2 + \sqrt{r})^{-1} \text{ بازا}]$$

$$x^2 + 3x - 14 \cdot 107$$

$$(x = \sqrt[3]{\frac{r + 5\sqrt{r}}{r}} - \frac{1}{\sqrt[3]{r + 5\sqrt{r}}} \text{ بازا})$$

$$\left(\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x} \right)^2 - 4a^2 \sqrt[mn]{x^{m+n}} \cdot 108$$

$$[x = (a + \sqrt{a^2 - 1})^{\frac{ymn}{m-n}} \text{ بازا}]$$

با شرایط $n \neq 0, m \neq 0, m \neq n, a > 1$

$$\left[\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}} \right]^{-2} \quad .109$$

بازاء $x = a \left(\frac{m^2+n^2}{2mn} \right)^{\frac{1}{2}}$ $(n > m > 0, a > 0)$

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید:

$$\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{1}} \quad .111 \qquad \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad .110$$

$$\frac{12}{\sqrt{11}-\sqrt{5}} \quad .113 \qquad \frac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} \quad .112$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}} \quad .115 \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}} \quad .114$$

$(n$ عددی است صحیح و مثبت)

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}} \quad .117 \qquad \frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2} \quad .116$$

$$\frac{1}{(5-\sqrt{3})^5} \quad .119 \qquad \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}} \quad .118$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \quad .120$$

با شرط: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

$$\frac{\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{a^2b^2}-2\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{b^4}} \quad .121$$

اتحادهای زیر را ثابت کنید:

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 = 2(a-b)(b-c)(c-a) \quad .122$$

$$a+b+c=0 \quad \text{با شرط} \quad a^2+b^2+c^2=3abc \quad .123$$

۱۲۴. اتحاد لاگرانژ:

$$\begin{aligned} (a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2) &= \\ &= (a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2 + \\ &+ (a_1b_3-a_3b_1)^2 + \dots + (a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \quad .125$$

$$(a^2 > b, \quad b > 0, \quad a > 0)$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \times \dots \quad .126$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 1$$

$$\sqrt[4]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[4]{20-14\sqrt{2}} = 4 \quad .127$$

$$\sqrt[4]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[4]{2-\sqrt{5}} = 1 \quad .128$$

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \quad .129$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)$$

$$\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a^2-4}{a}}} + \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{\frac{a^2-4}{a}}} = \quad .130$$

$$= \frac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$$

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+(\sqrt{x}+1)^2(1-\sqrt{x})^{-2}} \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} - \dots \right] \quad .131$$

$$\left[\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \right]^2 - \frac{1}{2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$$

$$132. \text{ با شرط } x = \frac{\sqrt[2]{k}}{1+k} :$$

$$\frac{\sqrt[2]{2}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+1}} + \frac{\sqrt[2]{2}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}} = \\ = \sqrt{1-k} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$$

$$133. \text{ با شرط } 0 < a < b < 2a, \quad x = \frac{\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{a} :$$

$$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}} = 1$$

$$134. \text{ ثابت کنید که } x = a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \text{ در معادله زیر صدق می کند:} \\ x^3 - 3ax^2 + 3x(a^2 - bcp) - a^3 - b^3p - c^3p^2 + 3abcp = 0$$

$$135. \text{ ثابت کنید یکی از ریشه های معادله } x^3 + 3px + 2q = 0 \text{ چنین است:}$$

$$x_0 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

$$136. \text{ ثابت کنید که حاصل عبارت زیر با } x \text{ مساوی عددی صحیح است:}$$

$$\frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{12} + \frac{7x^3}{24} + \frac{5x^2}{12} + \frac{x}{5}$$

$$137. \text{ ثابت کنید که اگر } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ سه عدد حقیقی باشند که در رابطه زیر صدق کنند:}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

دو مقدار از آنها قرینه یکدیگر خواهند بود.

$$138. \text{ ثابت کنید که عدد } n^2 + 3n + 5 \text{ با } n \text{ بر } 121 \text{ قابل قسمت نیست.}$$

۱۳۹. ثابت کنید که مجموع مکعبات سه عدد صحیح متوالی بر ۹ قابل قسمت است.

۱۴۰. کسر $\frac{4x}{x^2-1}$ را به مجموع دو کسر به صورت $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ تجزیه کنید.

۱۴۱. کسر زیر را ساده کنید :

$$\frac{x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2}{x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2}$$

۱۴۲. مجموع ضرایب کثیرال جمله‌ای را که از باز کردن پرانتز زیر بدست می‌آید، محاسبه کنید :

$$(6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x - 2)^{1962}$$

۱۴۳. مجموع ضرایب را در حاصلضرب زیر بدست آورید :

$$(x^3 - 2x + 2)^{25}(x^2 - 5x + 3)^{18}$$

۱۴۴. ثابت کنید در حاصلضرب :

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + \dots + x^{100})$$

پس از باز کردن پرانتزها و منظم کردن آن، جملاتی که شامل توانهای فرد x باشند، وجود ندارد.

۱۴۵. به صورت ضرب تبدیل کنید :

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$$

۱۴۶. ثابت کنید که عبارت :

$$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+15$$

بازاء همه مقادیر حقیقی x مثبت است.

۱۴۷. می‌نیم عبارت زیر را بدست آورید :

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+15$$

۱۴۸. ثابت کنید، حاصل عبارت زیر عددی است صحیح :

$$\sqrt{10}[(1+\sqrt{10})^{100} - (1-\sqrt{10})^{100}]$$

۱۴۹. ثابت کنید عددهای ۴۹، ۴۴۸۹، ۴۴۴۸۸۹، ... که با اضافه کردن

عدد ۴۸ در وسط عدد قبلی بدست می‌آید، مجذور کامل اند.

۱۵۰. ثابت کنید، وقتی n عددی فرد باشد، از تساوی:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

میتوان تساوی زیر را نتیجه گرفت:

$$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{z^n} = \frac{1}{x^n + y^n + z^n}$$

۱۵۱. عبارت زیر را به مجموع سه رادیکال تبدیل کنید:

$$\sqrt[3]{8 + \sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{8}}$$

۱۵۲. باچه شرایطی رادیکال:

$$\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$$

می تواند بصورت مجموع سه رادیکال: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ تبدیل شود که در آن x و y و z اعداد مثبت گویائی باشند.

§ ۳. معادلات و دستگاههای درجه اول

معادلات زیر را حل کنید:

$$\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \quad ۱۵۳$$

که در آن a و b و c مخالف صفرند.

$$\frac{x+b}{a+b} + \frac{x-b}{a-b} = \frac{b+x}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{x-b}{a^2 - b^2} + \frac{2x}{a} \quad ۱۵۴$$

$$\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a+b+c \quad ۱۵۵$$

$$\frac{6x + 2a + 2b + c}{6x + 2a - 2b - c} = \frac{2x + 6a + b + 3c}{2x + 6a - b - 3c} \quad ۱۵۶$$

دستگاههای زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \frac{5}{2u+v} + \frac{4}{2u-3v} = 5 \\ \frac{15}{2u+v} + \frac{2}{2u-3v} = 5 \end{cases} \quad (u \neq -\frac{v}{2}, u \neq \frac{3}{2}v) \quad .157$$

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ |x-1| - y = -5 \end{cases} \quad .158$$

۱۵۹. بازاء چه مقادیر صحیح پارامتر m ، ریشه‌های دستگاه زیر در شرایط $x < 0$ و $y < 0$ صدق می‌کنند :

$$\begin{cases} mx - 2y = 3 \\ 3x + my = 4 \end{cases}$$

۱۶۰. با شرط $a+b+c \neq 0$ دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} (a+b)(x+y) - cz = a-b \\ (b+c)(y+z) - ax = b-c \\ (c+a)(z+x) - by = c-a \end{cases}$$

دستگاههای زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{v} = 11 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{v} = 13 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{v} = 15 \end{cases} \quad .162 \quad \begin{cases} x+y+z=39 \\ y+z+u=45 \\ z+u+x=43 \\ u+x+y=41 \end{cases} \quad .161$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13 \end{array} \right. \quad .193$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3 \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9 \\ x_6 + x_7 + x_8 = -2 \\ x_7 + x_8 + x_9 = 2 \end{array} \right. \quad .194$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ -x_4 + 2x_5 - x_6 = 1 \\ -x_5 + 2x_6 = 1 \end{array} \right. \quad .195$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots \dots \dots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right. \quad .196$$

[illegible]

۱۶۸. ریشه‌های حقیقی دستگاه زیر را معین کنید :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{\gamma} + \frac{1}{x_1} = x_\gamma \\ \frac{x_\gamma}{\gamma} + \frac{1}{x_\gamma} = x_r \\ \dots \dots \dots \\ \frac{x_{n-1}}{\gamma} + \frac{1}{x_{n-1}} = x_n \\ \frac{x_n}{\gamma} + \frac{\gamma}{x_n} = x_1 \end{array} \right.$$

دستگاه‌های زیر را حل کنید :

[illegible]

[illegible]

§ ۴. معادلات درجه دوم . معادلات از درجات بالاتر

۱۷۱. معادله درجه دومی با ضرایب گویا تشکیل دهید ، بطوریکه یکی از ریشه‌های آن $\sqrt{3} - 4$ باشد .

۱۷۲. معادله درجه دومی با ضرایب حقیقی تشکیل دهید ، بشرطی که یکی از ریشه‌های آن $x = 2 + 5i$ باشد .

۱۷۳. بدون حل معادله :

$$x^2 - \frac{\sqrt{15}}{4}x + \frac{5}{16} = 0$$

تفاضل مکعبات دوریشه آنرا محاسبه کنید (مکعب ریشه کوچکتر را از مکعب ریشه بزرگتر کم کنید) .

۱۷۴. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله :

$$3x^2 + 17x - 14 = 0$$

باشند . بدون حل معادله مقدار عبارت زیر را بدست آورید :

$$\frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_1^2x_2}$$

۱۷۵. معادله درجه دومی بصورت زیر مفروض است :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن :

(۱) با ریشه‌های معادله مفروض قرینه باشند .

(۲) معکوس ریشه‌های معادله مفروض باشند .

(۳) n واحد بیشتر (یا کمتر) از ریشه‌های معادله مفروض باشند .

(۴) n برابر $\left(\frac{1}{n}\right)$ ریشه‌های معادله مفروض باشند .

۱۷۶. معادله درجه دوم زیر مفروض است :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

معادله درجه دوم دیگری تشکیل دهید که ریشه‌های آن مجذور ریشه‌های این معادله باشند .

۱۷۷. بازاء چه مقادیری از λ ، معادله زیرریشه‌های مساوی دارد :

$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda - 2 = 0$$

۱۷۸. بازاء چه مقادیر صحیحی از k ریشه‌های معادله درجه دوم زیر گویا هستند :

$$kx^2 - (1 - 2k)x + k - 2 = 0$$

۱۷۹. بازاء چه مقادیر m ، در معادله زیر :

$$2x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$$

یکی از ریشه‌ها دو برابر دیگری است. این ریشه‌ها را محاسبه کنید.

۱۸۰. معادله دوجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادله

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ باشد.}$$

۱۸۱. معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادله

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ باشد.}$$

۱۸۲. بدون حل معادله درجه دوم $x^2 + px + q = 0$ ، مجموع مکعبات

ریشه‌های آنرا بدست آورید.

۱۸۳. مقدار عددی پارامتر m را در معادله :

$$4x^2 - 15x + 4m^2 = 0$$

چنان پیدا کنید که یکی از ریشه‌های آن مجذور ریشه دیگرش باشد، در این صورت ریشه‌ها را محاسبه کنید.

۱۸۴. p و q را در معادله درجه دوم $x^2 + px + q = 0$ چنان پیدا کنید که ریشه‌های آن مساوی p و q باشد.

۱۸۵. بازاء چه مقادیری از a ، ریشه‌های معادله درجه دوم زیر حقیقی است :

$$x^2 - 4x + \log_7 a = 0$$

۱۸۶. مقدار عددی پارامتر m را در معادله درجه دوم :

$$2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$$

چنان پیدا کنید که ریشه‌های آن x_1 و x_2 در رابطه زیر صدق کنند :

$$3x_1 - 2x_2 = 11$$

۱۸۷. مقدار عددی پارامتر k را چنان پیدا کنید که یکی از ریشه‌های معادله

درجه دوم زیر نصف ریشه دیگر آن باشد :

$$x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2 = 0$$

۱۸۸. پارامتر a را در معادله درجه دوم :

$$x^2 - ax + a - 1 = 0$$

چنان پیدا کنید که $x_1^2 + x_2^2$ می نیمم باشد (x_1 و x_2 ریشه های معادله و a عددی حقیقی است).

۱۸۹. چه رابطه ای بین ضرایب معادلات درجه دوم :

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \end{cases}$$

برقرار باشد ، برای اینکه دو معادله دارای يك ریشه مشترك باشند .

۱۹۰. بازاء چه مقدار پارامتر m ، دو معادله درجه دوم زیر يك ریشه مشترك دارند :

$$\begin{cases} 2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0 \\ 4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0 \end{cases}$$

۱۹۱. معادله دوم جذوری با ضرایب حقیقی تشکیل دهید که دوریشه آن $\sqrt{5}$

و $3i$ باشد ($i = \sqrt{-1}$).

۱۹۲. مقدار پارامتر k را در معادله درجه دوم :

$$x^2 - (3k+2)x + k^2 = 0$$

چنان پیدا کنید که رابطه $x_1 = 9x_2$ بین ریشه های آن برقرار باشد .

معادلات زیر را حل کنید :

$$(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) - 63 = 0 \quad .193$$

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0 \quad .194$$

$$\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = 4 + 2x + x^2 \quad .195$$

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = 0/5625 \quad .196$$

$$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680 \quad .197$$

$$(8x+7)^2(4x+3)(x+1) = 4/5 \quad .198$$

$$(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1 \quad .199$$

$$(x + a)(x + 2a)(x - 3a)(x - 4a) = b^2 \quad .200$$

$$x^6 + x^2 - 10x^2 + x + 1 = 0 \quad .201$$

$$(x + 1)^2 = 2(1 + x^2) \quad .202$$

$$(3 - x)^2 + (2 - x)^2 = (5 - 2x)^2 \quad .203$$

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4} \quad .204$$

$$(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 25 \quad .205$$

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{17}{4} \quad .206$$

$$\frac{x+1}{x^2+x-1} + \frac{x^2+x-1}{x+1} = 2 \quad .207$$

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1} = 2/5 \quad .208$$

$$(x + 1)^6 + 20 = 9(x + 1)^2 \quad .209$$

$$(5 - x)^2 + (2 - x)^2 = 17 \quad .210$$

$$x^2 - 2x^2 + x - 132 = 0 \quad .211$$

$$x^6 = \frac{257x^2 - 68}{68x^2 - 257} \quad .212$$

$$x^2 + (x - 1)^2 = 97 \quad .213$$

$$(x - 2)^6 - 19(x - 2)^2 = 216 \quad .214$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 5 \quad .215$$

$$2x^2 - 3x^2 + 3x - 2 = 0 \quad .216$$

$$x^2 + 4 = 3x^2 \quad .217$$

۲۱۸. معادله $(1 + x^2)^2 = 2kx(1 - x^2)$ را حل کنید ، بشرطی که k

حدهموج جملات يك تصاعد هندسی باشد که در آن $u_1 = 1/25$ و $u_7 = 0/5$.

$$\frac{2+x^2}{x^2-2x} = \frac{x^2}{3} \quad .۲۱۹$$

۲۲۰. مسئلهٔ دکارت :

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

$$x^4 - 9x^2 + 8 = 0 \quad .۲۲۱$$

$$\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a+b-2x)^2} = \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} \quad .۲۲۲$$

۲۲۳. اگر بدانیم که یکی از ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$$

برابراست با $i(\sqrt{-1})$. بقیهٔ ریشه‌های آنرا محاسبه کنید .

۲۲۴. ریشه‌های حقیقی معادلهٔ زیر را بدست آورید :

$$2x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 14x^2 + 11x + 5 = 0$$

۲۲۵. معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$x^5 + 25x^3 - 8x^2 + k = 0$$

بشرطی که یکی از ریشه‌های آن مساوی $5i$ باشد .

۲۲۶. اگر x_1 و x_2 و x_3 و x_4 ریشه‌های معادلهٔ دوم‌جذوری :

$$ax^2 + bx^2 + c = 0$$

باشند ، ثابت کنید بین ضرایب و ریشه‌های این معادله روابط زیر برقرار است :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 ; \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{b}{a} ; \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0 ; \\ x_1x_2x_3x_4 = \frac{c}{a} . \end{array} \right.$$

۲۲۷. در معادلهٔ زیر ، مجموع جوابها ، مجموع مربعات ، مجموع توانهای سوم ،

مجموع توانهای چهارم و مجموع توانهای پنجم ریشه‌ها را بدست آورید :

$$ax^2 + bx^2 + c = 0 \quad (۱)$$

۲۲۸. معادله دومجذوری با ضرایب حقیقی تشکیل دهید، بشرطی که :
(۱) دوریشه آن $\sqrt{5}$ و $3i$ باشد.

(۲) یکی از ریشه های آن $5 - 2i$ باشد x_1 .

۲۲۹. چه رابطه ای بین p و q ، ضرایب معادله دومجذوری.

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

برقرار باشد تا ریشه های آن تشکیل يك تصاعد حسابی بدهند.

۲۳۰. در معادله دومجذوری زیر مقدار پارامتر k را چنان پیدا کنید که ریشه های آن تشکیل تصاعد حسابی بدهند :

$$x^4 - (2k + 2)x^2 + k^2 = 0$$

۲۳۱. ثابت کنید که برای معادله درجه سوم :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

روابط زیر بین ریشه ها و ضرایب برقرار است :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} ;$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} ;$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} .$$

۲۳۲. معادله درجه سوم زیر را حل کنید :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

بشرطی که ریشه های آن :

(۱) تشکیل تصاعد حسابی بدهند .

(۲) تشکیل تصاعد هندسی بدهند .

۲۳۳. معادله زیر را حل کنید :

$$x^4 - [a^2(2 + \sqrt{2}) + b^2(2 - \sqrt{2})][a^2(2 - \sqrt{2}) + b^2(2 + \sqrt{2})]x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$$

۲۳۴. ثابت کنید که معادله زیر ریشه حقیقی ندارد :

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

۲۳۵. ثابت کنید که معادله زیرریشه‌های صحیح و مثبت ندارد :

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$$

۲۳۶. ثابت کنید که ریشه‌های معادله $x^n - 1 = 0$ را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k=0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots \text{ و } n-1)$$

۲۳۷. معادله زیر را حل کنید :

$$x^4 - 1 = 0$$

۲۳۸. مسئله ویت - ثابت کنید که ریشه‌های معادله :

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0$$

عبارتند از a و b و c .

۲۳۹. ثابت کنید که اگر حاصل کثیرالجملة :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^2 + a_0x + a_0$$

بازاء $x=0$ و $x=1$ مساوی عدد فردی باشد ، معادله :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^2 + a_0x + a_0 = 0$$

دارای جواب صحیح نیست (a_i عددی صحیح و مثبت و 1 و 2 و $\dots$ و $n-1$ و 0 می‌باشد).

۲۴۰. ثابت کنید که ریشه‌های مثبت معادله زیر گنگ‌اید :

$$x^5 + x - 10 = 0$$

۲۴۱. یکی از ریشه‌های مثبت معادله زیر را پیدا کنید :

$$x^n - nax^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} - \dots - a^n = 0 \quad (a > 0)$$

۲۴۲. مقدار مثبت و صحیحی برای x پیدا کنید که در معادله زیر صدق کند :

$$\frac{1+3+5+\dots+(2x-1)}{\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{x(x+1)}} = 110$$

۲۴۳. جوابهای صحیح معادله زیر را پیدا کنید :

$$1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$$

۲۴۴. مسئله اولر - تمام اعداد مثبت و گویائی که در معادله زیر صدق می کنند، بدست آورید :

$$x^y = y^x$$

۵. معادلات گنگ

معادلات زیر را حل کنید :

$$\sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{2x^2 + x - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \quad .245$$

$$x^2 + 5x + 4 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 0 \quad .246$$

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{2x^2 + 5x + 1} = 1 \quad .247$$

$$\frac{\sqrt{21+x} + \sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x} - \sqrt{21-x}} = \frac{21}{x} \quad (x \neq 0) \quad .248$$

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2} \quad .249$$

$$\sqrt{5 - \sqrt{x+1} + \sqrt{2x^2+x+3}} = 1 \quad .250$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = 1 \quad .251$$

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x} \quad (x \neq 0) \quad .252$$

$$\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} = x^2 \quad (x \neq 0) \quad .253$$

$$(x-3)^2 + 3x - 22 = \sqrt{x^2 - 3x + 7} \quad .254$$

$$\frac{(x+a)\sqrt{x+b} + (x+b)\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b} + \sqrt{x+a}} = \sqrt{ab} \quad (ab > 0) \quad .255$$

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0 \quad .256$$

$$2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} = 3 \quad .257$$

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{13}{6} \quad .258$$

$$\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} = 2 \left[\frac{1-a^2}{(1+a)^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad .259$$

بشرط $|a| < 1$

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{15}{8} \sqrt[3]{\frac{x}{15}} \quad (-1 < x < 1) \quad .260$$

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 34 \quad .261$$

$$\sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4 \quad .262$$

$$\sqrt{2x^2 - 9x + 4} + 3\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x^2 + 21x - 11} \quad .263$$

$$\frac{3+x}{3x} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}}} \quad .264$$

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 1 \quad .265$$

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a} \quad .266$$

$$\sqrt[4]{x^2+17} + \sqrt[4]{x^2+17} = 6 \quad .267$$

.268

$$\frac{[\sqrt[3]{(a-x)^2} - \sqrt[3]{(a-x)(x-b)} + \sqrt[3]{(x-b)^2}]^2}{\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b}} = a-b$$

$$\frac{x\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}}=12 \quad .269$$

$$\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x} \quad .270$$

$$\sqrt[5]{\frac{a+x}{a}}+\sqrt[5]{\frac{a+x}{b}}=\sqrt[5]{\frac{x}{ab}} \quad .271$$

$$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}=4 \quad .272$$

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\sqrt{\frac{b+x}{b-x}}-\sqrt{\frac{b-x}{b+x}} \quad .273$$

که در آن $a \neq b$ ، $ab < 0$ و $a+b \neq 0$ است .

$$\sqrt[7]{(a+x)^7}-\sqrt[7]{a^7-x^7}+\sqrt[7]{(a-x)^7}=\sqrt[7]{a^7} \quad .274$$

$$\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}+\sqrt[n]{\frac{b+x}{a-x}}=2 \quad .275$$

$$\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{a^n x^n}}=b \quad .276$$

که در آن $a > 0$ و $b > a$ و n عددی صحیح و مثبت است . ریشه‌های مثبت معادله را پیدا کنید .

۲۷۷ . اگر $a > b > 0$ باشد ، ریشه‌های مثبت معادله زیر را پیدا کنید :

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}+\frac{\sqrt[n]{x}}{b}$$

۲۷۸ . بشرطی که همه n عبارت واقع در زیر ادیکالها مثبت باشند ، ریشه‌های حقیقی معادله زیر را پیدا کنید :

$$\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}} = x$$

§ ۶. دستگاه معادلات از درجات بالاتر

دستگاههای زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x + xy + y = 7 & .280 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x + xy + y = 11 & .279 \\ x^2 y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11 & .282 \\ (x^2 - y^2)xy = 180 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 10 & .281 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

۲۸۳. بازاء چه مقادیری از پارامتر m ، دستگاه زیردو ریشه مساوی دارد :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ mx - y + 4 - 3m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 18 & .285 \\ xy + 4y^2 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 & .284 \\ x + xy + y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+1)(3x^2+5y)=144 & .286 \\ 4x^2+x+5y=24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 19(x-y) & .288 \\ x^2 + y^2 = 7(x+y) \end{cases} \quad \begin{cases} xy(x+y) = 30 & .287 \\ x^2 + y^2 = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 \cdot (y+1)^2 = 27xy & .289 \\ (x^2+1) \cdot (y^2+1) = 10xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y) \cdot (xy+1) = 18xy & .290 \\ (x^2+y^2) \cdot (x^2y^2+1) = 208x^2y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 602 & .292 \\ xy^2 - x^2y = -198 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 & .291 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^4 + 4(x+y)^2 = 117 \\ x-y = 25 \end{cases} \quad .293$$

$$\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases} \quad .294$$

$$.b \neq 0 \text{ و } a \neq 0 \text{ با شرط } \begin{cases} x^4 + y^4 = b^4 \\ x+y = a \end{cases} \quad .295$$

$$.a \neq 0 \text{ با شرط } \begin{cases} x^5 + y^5 = a^5 \\ x+y = a \end{cases} \quad .296$$

$$.b \neq 0 \text{ و } a \neq 0 \text{ با شرط } \begin{cases} x^5 + y^5 = a^5 \\ x+y = b \end{cases} \quad .297$$

$$.y > 0 \text{ و } x > 0 \text{ با شرط } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{y}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78 \end{cases} \quad .298$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ xy = 27 \end{cases} \quad .299$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{\Delta x}} + \sqrt{\frac{\Delta x}{x+y}} = \frac{34}{15} \\ x+y+xy = 29 \end{cases} \quad .300$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = 2 \\ x+y = 12 \end{cases} \quad .301$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{9x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{9x}} = \frac{5}{2} \\ xy - x - y = 9 \end{cases} \quad .302$$

$$\begin{cases} \sqrt[7]{xy} - \sqrt[3]{xy} = 4 \\ x + y = 20 \end{cases} \quad .303$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2}} = \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \\ x^2 + 2y^2 = 118 \end{cases} \quad .304$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 50 \\ \Delta x = 3z \\ \Delta y = 4z \end{cases} \quad .306 \quad \begin{cases} 3x = 2y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 196 \end{cases} \quad .305$$

$$.z \neq 0, y \neq 0, x \neq 0 \text{ با شرط } \begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases} \quad .307$$

$$\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{12}{3} \\ x \cdot y \cdot z = 1 \end{cases} \quad .308$$

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-1} = x+y+z \quad .309$$

$$.a+b+c \neq 0 \text{ با شرط } \begin{cases} x(x+y+z) = a \\ y(x+y+z) = b \\ z(x+y+z) = c \end{cases} \quad .310$$

$$.a+b+c \neq 0 \text{ با شرط } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = ax = by = cz \quad .311$$

$$\frac{xy}{x+y} = a ; \frac{xz}{x+z} = b ; \frac{yz}{y+z} = c \quad .312$$

$$(x+y) : (\Delta - z) : (y+z) : (9+y) = 3 : 1 : 2 : \Delta \quad .313$$

$$\frac{x+y-z}{\Delta} = \frac{y+z-x}{\gamma} = \frac{z+x-y}{11} = \frac{xyz}{9} \quad .314$$

$$\begin{cases} (y+z)^2 - x^2 = a^2 & .316 \\ (z+x)^2 - y^2 = b^2 \\ (x+y)^2 - z^2 = c^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 27 & .315 \\ x^2 + z^2 + xz = 28 \\ y^2 + z^2 + yz = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+z)(x+y+z) = a \\ (z+x)(x+y+z) = b \\ (x+y)(x+y+z) = c \end{cases} \quad .317$$

$$\begin{cases} \frac{10}{3x} + \frac{\Delta}{y} - \frac{3}{2z} = \frac{1}{3} & .319 \\ \frac{3y-4z}{yz} = 4 \\ xy + 10yz - \Delta xyz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(y+z) = a^2 & .318 \\ y(x+z) = b^2 \\ z(x+y) = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=9 & .321 \\ xy+xz+yz=26 \\ xyz=24 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=1 & .320 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 & .322 \\ (x^2+y^2)^2 + (y^2+z^2)^2 + (x^2+z^2)^2 = 294 \\ \frac{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}{y^2+z^2} = \frac{\Delta 0}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=18 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4 \end{cases} \quad .323$$

$$.z>0 \text{ و } y>0, x>0: \text{ با شرط: } \begin{cases} x=2(x+y+z)\sqrt[3]{xyz} \\ y=3(x+y+z)\sqrt[3]{xyz} \\ z=4(x+y+z)\sqrt[3]{xyz} \end{cases} \quad .324$$

$$.z>0 \text{ و } y>0, x>0: \text{ با شرط: } \begin{cases} x=\sqrt[2]{xyz} + \frac{\sqrt[3]{6}}{3}\sqrt[6]{xyz} \\ y=\sqrt[2]{xyz} + \frac{\sqrt[3]{6}}{5}\sqrt[6]{xyz} \\ z=\sqrt[2]{xyz} - \frac{\sqrt[3]{6}}{8}\sqrt[6]{xyz} \end{cases} \quad .325$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{7}{12} ; x+y+z+t=22 \\ \frac{z+t}{zt} = \frac{5}{18} ; \quad xyzt=648 \end{cases} \quad .326$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} \\ x_1+x_2+x_3+\dots+x_n=15 \\ x_1=8x_2 \end{cases} \quad .327$$

$$:x_i>0 \text{ و } a_i>0: \text{ با شرط: } \begin{cases} \frac{x_1x_2\dots x_n}{x_1}=a_1 \\ \frac{x_1x_2\dots x_n}{x_2}=a_2 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{x_1x_2x_3\dots x_{n-1}}{x_n}=a_n \end{cases} \quad .328$$

$i=1 \text{ و } 2 \text{ و } \dots \text{ و } n$

$$\begin{cases} x! + y! = z! \\ x + y = z \end{cases} \quad ۳۲۹$$

§ ۷. اعداد مختلط

۳۳۰. قضیه ویت را برای حالتی که ریشه‌های معادله موهومی است ثابت کنید.

۳۳۱. بازاء چه مقادیر حقیقی n ، ریشه‌های معادله درجه دوم زیر موهومی است:

$$(n+5)x^2 - 2nx + (n-1) = 0$$

۳۳۲. بازاء چه مقدار عددی k ، ریشه‌های معادله درجه دوم زیر با هم برابرند:

$$x^2 - 2(3+i)x + k = 0$$

۳۳۳. آیا میتوان گفت که عدد مختلط $3+8i$ از $1+2i$ بزرگتر است؟

۳۳۴. بازاء چه مقادیر حقیقی x و y تساوی زیر برقرار است :

$$\frac{(x-4) + (y-1)i}{1+i} = 2-5i$$

۳۳۵. کالبد (مدول) عدد مختلط زیر را پیدا کنید :

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2} + i\sqrt{2xy}}{(x-y) + 2i\sqrt{xy}}$$

۳۳۶. کالبد (مدول) و آوند (آرگومان) عدد مختلط زیر را پیدا کنید :

$$z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}$$

۳۳۷. ثابت کنید که اگر کالبد يك عدد مختلط مساوی واحد باشد ، میتوان

آنها بصورت $\frac{c+i}{c-i}$ نوشت ، که در آن c عددی است حقیقی .

۳۳۸. عدد $1-i$ را بصورت مثلثاتی بنویسید .

۳۳۹. دو عدد $+1$ و -1 را بصورت مثلثاتی بنویسید .

۳۴۰. حاصل عبارت $\left(\frac{4}{\sqrt{3}i-1}\right)^{12}$ را بدست آورید .

۳۴۱. عبارت $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}-i(1+i)^{98}}$ را محاسبه کنید .

۳۴۲. مسئله لایب نیز . ثابت کنید :

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

۳۴۳. اگر $n \geq 1$ باشد، حاصل ضرب زیر را بدست آورید :

$$\left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right] \cdots \left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right]$$

۳۴۴. ثابت کنید :

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \begin{cases} 2 & (n=3k) \\ -1 & (n=3k+2) \\ n=3k+1 & (k=0,1,2,\dots) \end{cases}$$

محاسبه کنید :

$$\sqrt[n]{1} \quad . 345 \quad \sqrt[3]{i} \quad . 346 \quad \sqrt{i}$$

$$\sqrt[3]{-2+2i} \quad . 347 \quad \sqrt[6]{1} (b : \sqrt[3]{1} (a \quad . 348$$

۳۵۰. ثابت کنید حاصلضرب دو عددی که هر کدام آنها مجموع دو مربع کامل باشد، برابر است با عددی که بنوبه خود مجموع مربعات دو عدد صحیح است.

۳۵۱. عبارت زیر را بصورت مجموع دو مربع کامل بنویسید :

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$

۳۵۲. معادله زیر را حل کنید :

$$(2+i)x^2 - (5-i)x + 2-2i = 0$$

۳۵۳. رابطهٔ موآور- ثابت کنید که اگر n عددی صحیح و مثبت باشد، داریم:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

۳۵۴. رابطه‌ای برای بیان $\cos n\varphi$ و $\sin n\varphi$ بر حسب قوای $\cos \varphi$ و $\sin \varphi$ پیدا کنید.

۳۵۵. اگر $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \varphi$ باشد، ثابت کنید:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\varphi$$

۳۵۶. ثابت کنید که اگر $\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^n = 1$ باشد، داریم:

$$a = \cotg \frac{k\pi}{n} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n-1)$$

۳۵۷. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$$

۳۵۸. ثابت کنید:

$$x^{2n+1} - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1 \right)$$

۳۵۹. اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد، مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$$

۳۶۰. مقدار مجموع زیر را بدست آورید:

$$S_n = 1 + i^2 C_n^1 + i^4 C_n^2 + \dots$$

۳۶۱. مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots$$

۳۶۲. صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = \left(2^{n-1} + \cos \frac{n\pi}{2} \right)$$

§ ۸. نامساویها و نامعادلات

۳۶۳. ثابت کنید که نامساوی $|x| < a$ با نامساوی دوطرفه زیرهم ارزاست:

$$-a < x < a$$

۳۶۴. ثابت کنید :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

۳۶۵. ثابت کنید :

$$|x-y| \geq |x| - |y|$$

۳۶۶. اگر x و y دو عدد مثبت باشند ، ثابت کنید :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

۳۶۷. اگر a و b و c اعدادی مثبت باشند ، ثابت کنید :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$$

علامت تساوی برای موردی است که $a=b=c$ باشد .

۳۶۸. ثابت کنید که برای اعداد مثبت و دلخواه $a_1, a_2, \dots, a_n$ داریم:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

۳۶۹. اگر a, b, k اعدادی مثبت و $a < b$ باشد ، ثابت کنید :

$$\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$$

۳۷۰. اگر a و b و c اضلاع مثلثی باشند . ثابت کنید :

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

۳۷۱. ثابت کنید ،

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

۳۷۲. ثابت کنید :

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

۳۷۳. نامعادله زیر را حل کنید:

$$\frac{x}{2} - 2 \left[5x - \frac{2-3(x-5)}{4} \right] > x + 3\frac{19}{24}$$

۳۷۴. این نامعادله را حل کنید :

$$6x^2 - 29x + 30 < 0$$

۳۷۵. نامعادله زیر را حل کنید :

$$-3x^2 + 5x + 2 > 0$$

۳۷۶. ترازویی داریم که میدانیم دقیق نیست (طول شاهین‌های ترازو نامساوی است). نصف کالائی رادریک کفه و نصف دیگر را در کفه دوم کشیده‌ایم. آیا باین وسیله عدم دقت ترازو جبران می‌شود؟

۳۷۷. نامساوی اقلیدس. ثابت کنید که مجموع بزرگترین و کوچکترین جمله يك تناسب هندسی از مجموع دو جمله دیگر بزرگتر است (جملات تناسب را مثبت بگیرید).

۳۷۸. نامساوی اقلیدس. اگر $a_1 > 0$ و $a_2 > 0$ باشد، ثابت کنید :

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$$

۳۷۹. ثابت کنید :

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} &\leq \\ &\leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n). \end{aligned}$$

۳۸۰. اگر $a_1 > 0$ و $\dots$ و $a_n > 0$ و $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 1$ باشد، ثابت کنید :

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \dots (1+a_n) \geq 2^n$$

۳۸۱. نامساوی برنولی. n عدد صحیح بزرگتر از واحد و $x > -1$ است، ثابت کنید :

$$(1+x)^n > 1+nx$$

۳۸۲. n عددی صحیح و بزرگتر از ۲ است، ثابت کنید :

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

۳۸۳. میدانیم x, y و z اعدادی مثبت و $x+y+z=a$ میباشد. ثابت کنید:

$$(a-x)(a-y)(a-z) \geq 8xyz$$

۳۸۴. اگر n عدد مثبت و صحیح بزرگتر از واحد باشد، ثابت کنید :

$$(n!)^2 \geq n^n$$

۳۸۵. n عددی است صحیح و مثبت، ثابت کنید :

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$$

۳۸۶. نامساوی بونیاکوسکی. ثابت کنید :

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq$$

$$\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

ضمناً علامت تساوی تنها در موردی است که داشته باشیم :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

۳۸۷. ثابت کنید که برای اعداد مثبت a و b و c داریم :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

۳۸۸. ثابت کنید که برای اعداد مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$ نامساوی زیر صحیح است :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

۳۸۹. نامساوی کوشی. ثابت کنید که اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد مثبتی باشند، داریم :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

علامت تساوی برای موردی است که داشته باشیم :

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$$

۳۹۰. اگر n عدد مثبت و صحیحی باشد ، ثابت کنید :

$$n! \leq \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$$

۳۹۱. ثابت کنید که برای اعداد مثبت و صحیح n نامساوی زیر برقرار است :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

۳۹۲. ثابت کنید :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

۳۹۳. ثابت کنید :

$$\begin{aligned} \left(a_1 \pm \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 \pm \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n \pm \frac{1}{a_n}\right)^2 &\geq \\ &\geq \left(\frac{S_n}{n} \pm \frac{n}{S_n}\right)^2 \cdot n \end{aligned}$$

که در آن $n \geq 2$ و $a_1 > 0$ ، $a_2 > 0$ ، $\dots$ ، $a_n > 0$ و

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

§ ۹. تصادها

توضیح : a_1 و a_n بترتیب اولین و n امین جمله تصاعد حسابی ، n تعداد جملات ، d قدرنسبت و S مجموع جملات آن در نظر گرفته شده است. همچنین u_1 و u_n اولین و n امین جمله تصاعد هندسی ، n تعداد جملات ، q قدرنسبت و S مجموع جملات آن در نظر گرفته شده است ،

۳۹۴. تصاعد حسابی را معین کنید که مجموع سه جمله اول آن ۲۷ و مجموع

مربعات این سه جمله مساوی ۲۷۵ است .

۳۹۵. تصاعد حسابی را پیدا کنید که در هر حال مجموع جملات آن سه برابر مجذور تعداد جملاتش باشد .

۳۹۶. اولین و آخرین جمله از يك تصاعد حسابی ۷ جمله‌ای مساوی ۱۱ و ۳۵ است . تصاعد حسابی دیگری داریم که جملات اول و آخر آن ۱۳ و ۳۸ است . اگر جمله چهارم هر دو تصاعد یکی باشد ، تعداد جملات تصاعد دوم را پیدا کنید .

۳۹۷. برای کندن چاهی قرار گذاشتند که برای هر متر ۲۵ ریال بیش از متر قبل پرداخت شود. اگر برای تمام چاه بابت هر متر مساوی متر اول می پرداختیم مخارج کندن چاه مساوی مخارج کندن مجموع متر آخر و سومین متر از آخر در شرایط فعلی می شد بشرطی که مخارج فعلی بطور متوسط برای هر متر ۱۷۵ ریال شده باشد ، عمق چاه را پیدا کنید .

۳۹۸. اگر در هر يك از تصاعدهای حسابی زیر ۱۰۰ جمله داشته باشیم ، چند جمله مساوی بین این دو تصاعد وجود خواهد داشت :

$$: ۵ , ۸ , ۱۱ , ۱۴ , \dots$$

$$: ۳ , ۷ , ۱۱ , ۱۵ , \dots$$

۳۹۹. در يك تصاعد حسابی میدانیم $a_m = n$ و $a_n = m$ ($m \neq n$) ، مطلوبست a_p .

۴۰۰. بین ۱ و ۳۱ چند واسطه حسابی قرار دهیم ، بنحوی که مجموع آنها ۴ برابر مجموع بزرگترین دو جمله آنها باشد .

۴۰۱. مطلوبست مجموع اولین صد عددی که در تقسیم بر ۵ باقیمانده‌ای مساوی واحد داشته باشند .

۴۰۲. مجموع جمله دوم و جمله بیستم يك تصاعد حسابی مساوی ۱۰ می باشد ،

حاصل ضرب این دو جمله مساوی $\frac{47}{64} \cdot 23$. مطلوبست مجموع ۱۶ جمله این تصاعد .

۴۰۳. مطلوبست جمله بیستم از يك تصاعد حسابی صعودی ، بشرطی که بدانیم :

$$a_7 \cdot a_5 = 52$$

$$a_7 + a_3 + a_2 + a_5 = 34$$

۴۰۴. تعداد جملات يك تصاعد حسابی را چنان پیدا کنید که داشته باشیم :

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = 126$$

$$a_2 + a_{2n} = 42$$

۴۰۵. ثابت کنید که اگر اعداد a ، b و c تشکیل تصاعد حسابی بدهند، اعداد:

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} ; \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} ; \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

هم تشکیل تصاعد حسابی خواهند داد .

۴۰۶. در يك تصاعد حسابی میدانیم مجموع n جمله اول مساوی m مجموع m جمله اول آن شده است ($m \neq n$) . ثابت کنید که S_{m+n} در این تصاعد برابر صفر است.

۴۰۷. اگر S_n ، S_{2n} و S_{3n} بترتیب مجموع n ، $2n$ و $3n$ جمله از يك تصاعد حسابی باشند، ثابت کنید :

$$S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$$

۴۰۸. مطلوبست تصاعد حسابی که در آن $S_n = 3n^2 + 4n$ باشد (S_n مجموع n جمله اول و n تعداد جملات آنست) .

۴۰۹. برای يك تصاعد حسابی تساوی زیر را داریم :

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$$

ثابت کنید :

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

۴۱۰. با چه شرطی سه عدد :

$$\log 2, \log(2^x - 1), \log(2^x + 3)$$

به‌همین ترتیبی که نوشته شده، تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند .

۴۱۱. ثابت کنید که اگر $\log_k x$ و $\log_m x$ و $\log_n x$ تشکیل تصاعد حسابی

بدهند، داریم :

$$n^2 = (k \cdot n)^{\log_k m} \quad (x > 0)$$

۴۱۲. با اعداد فرد گروههای زیر را درست کرده ایم :

... ; (۱۱ و ۹ و ۷) ; (۵ و ۳) ; (۱)

بطوریکه تعداد جملات گروه n ام مساوی n باشد . مجموع اعداد گروه n ام را پیدا کنید .

۴۱۳. با رشته اعداد طبیعی گروهائی چنان ساخته ایم که هر گروه به عدد مجذور کامل ختم شود :

; (۱ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵) ; (۴ و ۳ و ۲) ; (۱)

... ; (۱۶ و ۱۵ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰)

مطلوبست تعداد جملات گروه k ام و مجموع این جملات .

۴۱۴. تعداد جملات يك تصاعد حسابی زوج است ، اگر S_1 مجموع جملات نیم اول تصاعد و S_p مجموع جملات نیم دوم تصاعد باشد ، ثابت کنید :

$S_p - S_1 = d \cdot n^2$ که در آن d قدرنسبت و n نصف تعداد جملات تصاعد است .

۴۱۵. مطلوبست يك تصاعد حسابی که نسبت مجموع n جمله اول آن بر مجموع kn جمله بعد آن برابر مقدار ثابتی باشد (مستقل از n) .

۴۱۶. چهار عدد زوج مثبت چنان پیدا کنید که تشکیل تصاعد حسابی بدهند و ضمناً حاصلضرب مجموع سه عدد آخر در مجموع دو عدد اول و آخر برابر باشد با مکعب نصف مجموع دو عدد اول .

۴۱۷. ثابت کنید که اگر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ تشکیل تصاعد حسابی بدهند ، داریم :

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n} \quad (a_n \neq 0, \dots, a_1 \neq 0)$$

۴۱۸. ثابت کنید که برای هر تصاعد حسابی با جملات $a_1, a_2, a_3, \dots$ اتحاد زیر برقرار است :

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

۴۱۹. تصاعد حسابی زیر مفروض است :

... و ۳۵ و ۱۰۱۸

مطلوبست جمله‌ای از این تصاعد که همه ارقام آن از ۳ تشکیل شده باشد .

۴۲۰. چهار عدد چنان پیدا کنید که تشکیل تصاعد حسابی داده و بزرگترین آنها مساوی مجموع مربعات سه جمله دیگر باشد .

۴۲۱. باچه شرطی سه عدد a ، b و c بترتیب k امین ، p امین و q امین جمله از يك تصاعد حسابی هستند .

۴۲۲. ثابت کنید که $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ نمیتوانند جملاتی از يك تصاعد حسابی باشند .

۴۲۳. دو جسم بطرف زمین سقوط می کنند. ضمناً می دانیم که جسم اول ۳ ثانیه زودتر از جسم دوم شروع به سقوط کرده است . جسم در حال سقوط در ثانیه اول $\frac{4}{9}$ متر طی می کند و در هر ثانیه نسبت به ثانیه قبل به سرعتش $\frac{9}{8}$ متر اضافه می شود ، کی فاصله بین دو جسم مساوی يك کیلو متر می شود ؟

۴۲۴. کارگری ۱۶ کارگاه خودکار نساجی را اداره می کند . تولید هر کارگاه m متر در ساعت است . کارگر مسئول در ساعت ۸ (شروع کار روزانه) کارگاه اول را بکار می اندازد و هر يك از کارگاههای بعدی را به فواصل ۲ دقیقه به ۲ دقیقه . به بینید پس از ۷ ساعت کار محصول کارگاهها (بر حسب متر) چقدر است ؟

۴۲۵. مطلوبست نسبت بین ریشه های يك معادله دو مجذوری وقتی که این ریشه ها تشکیل تصاعد حسابی داده باشند .

۴۲۶. چهار عدد تشکیل تصاعد حسابی داده اند ، حاصلضرب عدد اول در عدد چهارم برابر با بزرگترین ریشه معادله زیر است :

$$x^{1+\log x} = (0.01)^{-\frac{2}{3}}$$

و مجموع مربعات دو عدد دوم و سوم ، ۵ برابر ردیف جمله ای از عبارت زیر است :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^{\frac{1}{6}} \right)^{20}$$

۴۳۸. حاکم سرزمین هند از مخترع بازی شطرنج خواست که هدیه‌ای از او بخواهد. مخترع خواهش کرد که برای او در خانهٔ اول شطرنج يك دانه گندم قرار دهند، در خانهٔ دوم ۲ دانه، در خانهٔ سوم ۴ دانه و به همین ترتیب در

هر خانه صفحه شطرنج ۲ برابر خانه قبل . مطلوبست تعداد گندمهایی که مخترع شطرنج طلب کرده است .

۴۳۹. لگاریتم يك عدد در چهار مبنای مختلف داده شده ، مبنای تصاعد هندسی تشکیل داده اند که قدر نسبت آن مساوی خود عدد است . اگر مجموع دو لگاریتم اول معادل مجموع دو لگاریتم آخر باشد ، این لگاریتمها را پیدا کنید .
۴۴۰. ثابت کنید که اگر $\log m$ ، $\log n$ و $\log p$ تشکیل تصاعد هندسی داده باشند ، $\log_m x$ ، $\log_n x$ و $\log_p x$ هم به تصاعد هندسی خواهند بود (x عدد مثبت دلخواهی است) .

۴۴۱. تعداد جملات يك تصاعد هندسی زوج است . مجموع تمام جملات این تصاعد ۳ برابر مجموع جملات ردیف فرد است . قدر نسبت تصاعد را معین کنید .

۴۴۲. مطلوبست مجموع مربعات n جمله از يك تصاعد هندسی که اولین جمله آن u_1 و قدر نسبت آن q باشد .

۴۴۳. ثابت کنید که در هر تصاعد هندسی مجموع مربعات تعداد فردی از جملات متوالی آن بر مجموع همان جملات قابل قسمت است .

۴۴۴. مطلوبست يك تصاعد هندسی نزولی که هر جمله آن مساوی ۱۰ برابر حد مجموع بقیه جملات آن باشد .

۴۴۵. بازاء چه مقداری از a ، حد مجموع جملات تصاعد نزولی زیر مساوی ۸ می شود :

$$2a + a\sqrt{2} + a + \dots$$

۴۴۶. ثابت کنید در هر تصاعد هندسی نزولی ، که قدر نسبت آن مساوی $\frac{1}{p}$ نباشد ،

حد مجموع همه جملات از ۴ برابر جمله دوم بیشتر است .

۴۴۷. مطلوبست يك تصاعد هندسی نزولی که جمله دوم آن مساوی ۶ و حد

مجموع جملات آن مساوی $\frac{1}{8}$ حد مجموع مربعات جملات آن باشد .

۴۴۸. کسره های متعارفی را پیدا کنید که در تبدیل آنها به کسر اعشاری کسر-

های متناوب زیر بدست آید :

$$۱) ۰/۳۷۳۷... ; ۲) ۰/۲۳۳۴۵۳۴۵...$$

۴۴۹. عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار ساعتی، نیم شب را نشان می‌دهند ، پس از چند ساعت این عقربه‌ها دوباره رویهم قرار می‌گیرند ؟

۴۵۰. ثابت کنید که مجموع معکوسات جملات يك تصاعد هندسی برابر است با مجموع همه جملات این تصاعد تقسیم بر حاصلضرب جمله آخر این تصاعد .
۴۵۱. حاصلضرب تمام جملات يك تصاعد هندسی را بر حسب جملات اول و آخر آن بیان کنید .

۴۵۲. حاصلضرب تمام جملات يك تصاعد را بر حسب S_n (مجموع جملات) و S'_n (مجموع عکس جملات) بیان کنید .

۴۵۳. ثابت کنید که اگر سه عدد مثبت a, b, c به تصاعد هندسی باشند، تساوی زیر برقرار است :

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N} \quad (۱)$$

و برعکس.

۴۵۴. ثابت کنید که اگر a, b, c به تصاعد هندسی باشند ، اعداد :

$$\frac{1}{\log_a N}, \frac{1}{\log_b N}, \frac{1}{\log_c N}$$

به تصاعد حسابی خواهند بود .

۴۵۵. ثابت کنید که اگر a, b, c درعین حال پنجمین ، هفدهمین و سی و هفتمین جمله يك تصاعد حسابی و هم يك تصاعد هندسی باشند ، داریم:

$$a^b - c^b = b^c - a^c = c^a - b^a = ۱$$

۴۵۶. مجموع ۱۰ جمله اول يك تصاعد عددی مساوی ۱۵۵ و مجموع دو جمله اول يك تصاعد هندسی مساوی ۹ است . این تصاعدها را معین کنید ، بشرطی که بدانیم جمله اول تصاعد حسابی مساوی قدر نسبت تصاعد هندسی است و جمله اول تصاعد هندسی مساوی قدر نسبت تصاعد حسابی است .

۴۵۷. دريك تصاعد حسابی ، جمله دوم واسطه هندسی دو جمله اول و چهارم آنست . ثابت کنید که جملات چهارم ، ششم و نهم این تصاعد ، تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند . قدر نسبت این تصاعد را معین کنید .

۴۵۸. دو تصاعد داریم یکی حسابی و دیگری هندسی ، هر يك از این دو تصاعد دارای سه جمله مثبت اند و ضمناً جملات اول و سوم دو تصاعد باهم برابرند (فقط جمله دوم آنها باهم فرق دارد). مجموع جملات کدام تصاعد بیشتر است.

۴۵۹. سه عدد هم تصاعد حسابی تشکیل داده اند و هم تصاعد هندسی ، چه رابطه ای بین این اعداد برقرار است ؟

۴۶۰. با چه شرطی سه عدد a ، b و c بترتیب k امین ، p امین و m امین جمله يك تصاعد هندسی هستند ؟

۴۶۱. با چه شرطی ، سه عدد a ، b و c جملاتی از يك تصاعد حسابی یا جملاتی از يك تصاعد هندسی هستند ؟

۴۶۲. آیا اعداد ۱۱ ، ۱۲ و ۱۳ میتوانند جملاتی از يك تصاعد هندسی باشند ؟

۴۶۳. آیا اعداد $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۷}$ می توانند جملاتی از يك تصاعد (حسابی یا هندسی) باشند ؟

۴۶۴. چهار عدد به تصاعد حسابی هستند ، اگر به این چهار عدد بترتیب ۵ ، ۶ ، ۹ و ۱۵ را اضافه کنیم يك تصاعد هندسی بدست می آید . این اعداد را پیدا کنید .

۴۶۵. چهار عدد تشکیل يك تصاعد هندسی داده اند ، اگر به این چهار عدد بترتیب ۴ ، ۲۱ ، ۲۹ و ۱ اضافه شود به تصاعد حسابی تبدیل می شوند ، این چهار عدد را پیدا کنید .

۴۶۶. مجموع ۵ جمله از يك تصاعد حسابی برابر با ریشه معادله زیر می باشد:

$$8^{2x+1} = (5/125)^{4-3x}$$

و جمله آخر این تصاعد برابر است با حد مجموع بی نهایت جمله از تصاعد هندسی نزولی زیر :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$$

تصادف حسابی را معین کنید .

۴۶۷. چند جمله از تصاعد هندسی نزولی :

$$\therefore 8:7:\dots$$

انتخاب کنیم تا اختلاف مجموع آنها با حد مجموع بی نهایت جمله آن کمتر از $0/01$ باشد .

۴۶۸. تصاعد هندسی نزولی بنویسید که جمله اول آن ۳ و حد مجموع جملات آن مساوی $\frac{7}{4}$ باشد .

۴۶۹. يك تصاعد حسابی ۱۱ جمله دارد و جملات اول ، پنجم و یازدهم آن تشکیل تصاعد هندسی می دهند . اگر اولین جمله این تصاعد حسابی مساوی ۲۴ باشد ، تمام جملات آنرا بنویسید .

۴۷۰. بین دو عدد ۳ و ۱۹۶۸۳ تعداد ۷ واسطه هندسی درج کنید و سپس جمله پنجم این تصاعد را به دو قسمت بر نسبت ۵ و ۴ تقسیم کنید .

۴۷۱. يك تصاعد حسابی دارای ۹ جمله است ، اولین جمله مساوی ۱ و مجموع جملات مساوی ۳۶۹ شده است . ضمناً يك تصاعد هندسی داریم که تعداد جملات آن هم مساوی ۹ می باشد و جملات اول و آخر آن بترتیب با جملات اول و آخر تصاعد حسابی برابر است . هفتمین جمله این تصاعد را پیدا کنید .

۴۷۲. دو تصاعد داریم : حسابی و هندسی . دو جمله اول تصاعد هندسی با جملات متناظرش (اول و دوم) در تصاعد حسابی برابر است و جمله سوم تصاعد هندسی ۱۲ واحد از جمله سوم تصاعد حسابی بزرگتر است . این دو تصاعد را معین کنید .

۴۷۳. دو تصاعد داریم : حسابی و هندسی . جملات اول و سوم دو تصاعد متناظراً باهم برابرند جمله دوم تصاعد حسابی ۲ واحد از جمله دوم تصاعد هندسی بزرگتر است ، ولی جمله چهارم تصاعد حسابی ۱۴ واحد از جمله چهارم تصاعد هندسی کوچکتر است . این دو تصاعد را مشخص کنید .

۴۷۴. سه عدد مثبت تشکیل تصاعد هندسی می دهند . اگر به جمله دوم ۸ واحد اضافه کنیم تصاعد حسابی تشکیل خواهند داد و اگر دوباره به عدد سوم ۶۴ واحد اضافه کنیم ، اعداد حاصل دوباره تشکیل تصاعد هندسی می دهند . این

سه عدد را معین کنید .

۴۷۵. سه عدد به تصاعد هندسی هستند . اگر از سومین جمله ۶۴ واحد کم کنیم ، سه عدد حاصل تشکیل تصاعد حسابی خواهند داد ، سپس اگر از جمله دوم ۸ واحد کم کنیم دوباره تصاعد هندسی بدست می آوریم . این سه عدد را معین کنید .

۴۷۶. تصاعد هندسی نزولی تشکیل دهید که جمله پنجم آن مساوی ۱۶ و هر جمله آن نصف مجموع همه جملات بعد از آن باشد .

۴۷۷. مطلوبست قدر نسبت يك تصاعد هندسی نزولی ، بشرطی که مجموع ۶ جمله اول آن مساوی $\frac{7}{8}$ حد مجموع همه جملات آن باشد .

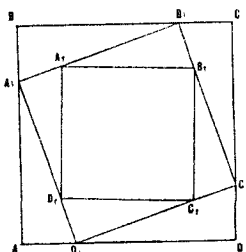
۴۷۸. ثابت کنید که اگر a^2 ، b^2 و c^2 به تصاعد حسابی باشد ، اعداد

$$\frac{1}{b+c} , \frac{1}{c+a} , \frac{1}{a+b}$$

نیز به تصاعد حسابی خواهند بود .

۴۷۹. در مربعی بضلع مساوی a مربع

دیگری محاط کرده ایم و در این مربع ، مربع سوم را غیره تا بی نهایت مرتبه (شکل ۱). حد مجموع مساحت های این مربعها را بدست آورید .



شکل ۱

۴۸۰. با شرایط مسئله قبل می نیمم حد مجموع مساحت های مربعهائی که در مربع بضلع a محاط شده اند پیدا کنید .

۴۸۱. در مثلث مساوی الاضلاعی بضلع a ، دایره ای محاط کرده ایم . در این دایره مثلث متساوی الاضلاع دیگری محاط کرده ایم و در مثلث اخیر دوباره يك دایره محاط کرده ایم و به همین ترتیب تا بی نهایت مرتبه . مطلوبست مجموع شعاعها ، محیطها و مساحت های همه این دایره ها .

۴۸۲. در دایره ای بشعاع R ، مربعی محاط کرده ایم . در این مربع دایره ای و دوباره در دایره دیگری محاط کرده ایم . مطلوبست حدی که مجموع

شاعها و همچنین مجموع مساحت‌های این دواير بسمت آن ميل می کند .
 ۴۷۳. در يك منشور قائم که ارتفاعش مساوی h و قاعده‌اش بشکل مربع و
 بضلّع مساوی a می باشد، منشور قائم دیگری محاط کرده ایم بطوریکه رؤس آن بر
 وسط اضلاع دوقاعده منشور اول قرار گرفته باشد ، سپس بهمین روش منشور
 سوم را در منشور دوم محاط کرده ایم و غیره تا بی نهایت منشور بدست آورده ایم .
 مطلوبست حد مجموع حجمهای منشورهای محاطی .

۴۸۴. مکعبی داریم بضلّع a که کره ای در آن محاط کرده ایم . در کره مکعبی محاط
 کرده ایم و دوباره در آن کره ای محاط کرده ایم و بهمین ترتیب تا بی نهایت مرتبه .
 مطلوبست حد مجموع : ۱ (حجمهای همه مکعبها ، ۲) حجمهای همه کره ها .
 ۴۸۵. چهار عدد طوری پیدا کنید که سه عدد اول تشکیل تصاعد هندسی و سه
 عدد آخر تشکیل تصاعد حسابی بدهند ، مجموع دو عدد اول و چهارم مساوی
 ۱۴ و مجموع دو عدد دوم و سوم مساوی ۱۲ باشد .

۴۸۶. قضیه برنولی. اگر دو جمله اول a_1 و a_2 از يك تصاعد حسابی
 مثبت و غیر مساوی باشند و متناظراً با u_1 و u_2 ، دو جمله اول يك تصاعد
 هندسی ، برابر باشند ، ثابت کنید هر جمله تصاعد حسابی که از a_3 شروع
 می شود کوچکتر است از جمله نظیرش در تصاعد هندسی .

۴۸۷. مجموع n جمله از تصاعد حسابی زیر را محاسبه کنید :

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \dots + \frac{1}{x}$$

۴۸۸. مسئله ارشمیدس . مطلوبست مجموع مربعات n عدد متوالی اولیه :

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

۴۸۹. مطلوبست مجموع مکعبات n عدد متوالی اولیه .

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

۴۹۰. مسئله فرما . مطلوبست مجموع توانهای چهارم n عدد متوالی اولیه :

$$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$$

۴۹۱. مجموع زیر را محاسبه کنید :

$$S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots + na^{n-1} \quad (1)$$

۴۹۲. حاصلجمع زیر را بدست آورید :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad (1)$$

۴۹۳. مجموع n جمله زیر را بدست آورید :

$$S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + kx^k + \dots + nx^n$$

۴۹۴. حاصل را بدست آورید :

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 \quad (1)$$

۴۹۵. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\begin{aligned} \frac{1^4}{1 \times 3} + \frac{2^4}{3 \times 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)} &= \\ &= \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)} \end{aligned}$$

۴۹۶. مجموعهای زیر را بدست آورید :

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots + \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2$$

۴۹۷. اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

۴۹۸. مسئله گلدباخ. مطلوبست مجموع تمام کسرهای بصورت :

$$\frac{1}{(n+1)^{m+1}} ;$$

که در آن m و n رشته اعداد طبیعی : $1, 2, 3, \dots$ می باشند .

۴۹۹. جدول زیر را در نظر می گیریم :

۵۰۸. کدام بزرگترند : $\log_2 5$ یا $\log_5 125$ ؟

۵۰۹. اگر $\log_{12} 2 = a$ باشد ، $\log_6 16$ را محاسبه کنید .

۵۱۰. میدانیم $\log_6 2 = a$ و $\log_6 5 = b$ مطلوبست $\log_3 5$.

۵۱۱. اگر داشته باشیم : $\log_{14} 7 = a$ و $\log_{14} 5 = b$ مطلوبست $\log_{35} 28$

۵۱۲. ثابت کنید :

$$\log 2 = \log_2 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_8 4 \dots \log_{10} 9$$

۵۱۳. بدون استفاده از جدول محاسبه کنید :

$$1) \sqrt[7]{\log 3} \quad ; \quad 2) 343^{1-\frac{2}{49}} \log_{49} 13$$

۵۱۴. ثابت کنید :

$$(\log_7 3)^{-1} + (\log_5 3)^{-1} > 2$$

۵۱۵. صحت تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\log \frac{1}{\frac{1}{m} n} = \log_m n$$

۵۱۶. میدانیم : $\log_a x = p$ و $\log_b x = q$ و $\log_{abc} x = r$ ، مطلوبست محاسبه

$$\cdot \log_c x$$

۵۱۷. اگر $\log_{ab} a = n$ باشد ، مطلوبست محاسبه :

$$\log_{ab} \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)$$

۵۱۸. عبارت زیر را ساده کنید :

$$\log \sqrt[n]{\frac{a^{-2}}{\sqrt[n]{ab} \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}}$$

۵۱۹. اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\dots \sqrt[n]{2}}}}_{n \text{ مرتبه}}$$

۵۲۰. ثابت کنید که بازاء هر مقدار مثبت a و N ، تساوی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_{a^2} N} + \frac{1}{\log_{a^3} N} + \frac{1}{\log_{a^4} N} + \frac{1}{\log_{a^5} N} = 15 \log_N a$$

۵۲۱. ثابت کنید :

$$\log_{a_1 a_2 \dots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \frac{1}{\log_{a_n} x}}$$

۵۲۲. اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}$$

۵۲۳. اگر $a \neq 1$ ، $b \neq 1$ ، $c \neq 1$ ، $d \neq 0$ و مقادیر a ، b ، c و d مثبت باشند، ثابت کنید :

$$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$$

۵۲۴. ثابت کنید :

$$\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \dots + \frac{1}{\log_{1958} N} = \frac{1}{\log_{1958!} N}$$

۵۲۵. اگر $\log_a x = 2$ و $\log_b x = 3$ و $\log_c x = 6$ باشد، $\log_{abc} x$ را پیدا کنید.

۵۲۶. اگر a و b اضلاع مجاور به زاویه قائمه و c طول وتر از مثلث قائم الزاویه ای باشد، تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$$

۵۲۷. اگر داشته باشیم :

$$y = 10^{\frac{1}{1-\log x}} ; \quad z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$$

$$x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$$

ثابت کنید:

(b) معادلات مجهول القوة

معادلات زیر را حل کنید :

$$4^{x+1} + 4^x = 320. \quad .528$$

$$2 \times 3^{x+1} - 4 \times 3^{x-2} = 450. \quad .529$$

$$10 \times 2^x - 4^x = 16. \quad .531 \quad 5^x + 3 \times 5^{x-2} = 140. \quad .530$$

$$5^x - 5^{2-x} = 20. \quad .532$$

$$3^{x+1} + 18 \times 3^{-x} = 29. \quad .533$$

$$49^x - 6 \times 7^x + 5 = 0. \quad .535 \quad 2 \times 3^{x+1} - 5 \times 9^{x-2} = 81. \quad .534$$

$$5^{2x} - 7^x - 35 \times 5^{2x} + 35 \times 7^x = 0. \quad .536$$

$$2^x + 12 \times 2^{-x} = 9/5. \quad .538 \quad \frac{1}{2} \times 4^{2x} - \frac{1}{2} \times 4^{4x} = 1. \quad .537$$

$$2^{2x} \times 3^x - 2^{2x-1} \times 3^{x+1} = -288. \quad .539$$

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}. \quad .540$$

$$5^{2x-2} - 2 \times 5^{x-2} + 3 = 0. \quad .541$$

$$3^{x-5} + 3^{x-7} + 3^{x-9} = 45/5 + 22/75 + 11/375 + \dots. \quad .542$$

$$\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2 \times 3\sqrt[3]{x-1}} = 1/5. \quad .544 \quad 0/5^{x^2-20x+61/5} = \frac{8}{\sqrt[3]{2}}. \quad .543$$

$$4\sqrt{x-2} + 16 - 10 \times 2\sqrt{x-2} = 0. \quad .545$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{\sqrt[3]{1/5}}. \quad .546$$

$$(x > 0 \text{ با شرط}) \quad 5^{2+4+6+\dots+2x} = (0/04)^{-28}. \quad .547$$

$$2 \left(2^{\sqrt{x+2}} \right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} - \sqrt[4]{x-1} = 0 \quad .548$$

$$0.125 \times 4^{2x-2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{1} \right)^{-x} \quad .549$$

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \times 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6 \quad .550$$

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4 \quad .551$$

$$4^x + 6^x = 9^x \quad .552$$

$$2^{2x} - \frac{1}{2^{2x}} - 6 \left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}} \right) = 1 \quad .553$$

(c) معادلات لگاریتمی

معادلات زیر را حل کنید :

$$\log(0.5+x) = \log 0.5 - \log x \quad .554$$

$$\log(4/5-x) = \log 4/5 - \log x \quad .555$$

$$\log(x-9) + 2 \log \sqrt{2x-1} - 2 = 0 \quad .556$$

$$\log \sqrt{x-5} + \log \sqrt{2x-3} + 1 - \log 30 = 0 \quad .557$$

$$\log \left(x - \frac{1}{9} \right) = 2 \log \frac{1}{6} \quad .558$$

$$x^{\log x} = 100x \quad .559$$

$$0.1 \times x^{\log x-2} = 100 \quad .561 \quad x^{\log x-1} = 100 \quad .560$$

$$\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10 \quad .562$$

$$0.4^{1+\log x^2} = 6/25^{2-\log x^2} \quad .563$$

$$\frac{2}{2^{\log 2x}} = \frac{1}{64} \quad .565 \quad x^{2 \log \frac{1}{x}} = 10x \quad .564$$

$$(a > 0) \quad x^{\log_a x} - a^x x = 0 \quad .566$$

$$x^{\log^2 x - \frac{2}{2} \log x} = \sqrt{10} \quad .567$$

$$\log_5 (x^2 - 11x + 43) = 2 \quad .568$$

$$\log \left(\sqrt[10]{2^{x^2 - 14/5x}} \right) = 0 \quad .569$$

$$\log \left(64 \sqrt[24]{2^{x^2 - 40x}} \right) = 0 \quad .570$$

$$4 - \log x = 2 \sqrt{\log x} \quad .571$$

$$\log 10 + \frac{1}{3} \log (271 + 2 \sqrt{2x}) = 2 \quad .572$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \log 5 - 1 + \log x \right) = 1 - \log 5 \quad .573$$

$$\frac{\log \sqrt{x} + \frac{1}{2} \log 5 - 1}{\frac{1}{4} \log (x - 1)} = \log 0.1 \quad .574$$

$$\log 2 + \log (4^{x-2} + 9) = 1 + \log (2^{x-2} + 1) \quad .575$$

$$\log_4 (x + 12) \cdot \log_x 2 = 1 \quad .576$$

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x = -1 \quad .577$$

$$(x > 0) \quad -\sqrt[{\log x}]{x} = 10^{x^2} \quad .578$$

$$5 \log_7 3 + 2 \log_7 \sqrt{(x-2)\sqrt{8}} - \frac{2}{3} \log_7 27 = 1/5 \quad .579$$

$$\frac{-x}{\sqrt[0.125]{}} = 3^{2 - \log_7 18} \quad .580$$

$$\log \sqrt[75+5]{x-1} = 1 \quad .581$$

۵۸۲. ثابت کنید : $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ و با استفاده از آن معادله زیر

را حل کنید :

$$\log_x 2 + \log_2 x = 2/5$$

$$\frac{y + \log x}{x^y} = 10^{1 + \log x} \quad .584 \quad \frac{\log(35 - x^2)}{\log(5 - x)} = 3 \quad .583$$

$$(\sqrt{x})^{\log_x x - 1} = 5 \quad .586 \quad x^{\log_x 2 (x^2 - 1)} = 5 \quad .585$$

$$\log 10^{\log(x^2 + 21)} - 1 = \log x \quad .587$$

$$\log_{\pi} \log_2 \log_3 x = 0 \quad .588$$

$$2(\log 2 - 1) + \log(\delta^{\sqrt{x}} + 1) = \log(\delta^{1 - \sqrt{x}} + \delta) \quad .589$$

$$2 \log 2 + \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \log 3 - \log\left(\sqrt[2]{3} + 27\right) = 0 \quad .590$$

$$\log_x \sqrt{\delta} + \log_x \delta x - 2 \frac{1}{x} = (\log_x \sqrt{\delta})^2 \quad .591$$

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{2}{x} \quad .592$$

$$\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 \frac{x}{2}} - 2 \log_2 \sqrt{x} + (\log_2 x)^2 = 3 \quad .593$$

$$2x^{\log x} + 3x^{-\log x} = 5 \quad .594$$

$$\delta^{\log x} - 3^{\log x + 1} = 3^{\log x + 1} - \delta^{\log x - 1} \quad .595$$

$$x^{\log^2 + \log x^2 + 2} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}} \quad .596$$

.597

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}\right) \cdot x^{0.5(\log_2 x^2)^2 - 2} = \frac{x^6}{2^{11}}$$

$$\log_7 x + \log_7 x + \log_7 x = 1 \quad .598$$

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7 \quad .599$$

$$\log \log x = \sqrt{\frac{\log(m-n)}{(m+n)} \cdot \frac{\log(m+n)}{(m-n)}} \quad .600$$

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a \quad .601$$

۶۰۲. مقادیر k را چنان پیدا کنید که معادله زیر تنها يك ریشه مثبت داشته باشد :

$$\log(kx) = 2 \log(x+1)$$

$$\frac{\log(x^2)}{(\log x)^2} + \frac{\log(x^3)}{(\log x)^3} + \frac{\log(x^4)}{(\log x)^4} + \dots = 8 \quad .603$$

(d) دستگاه معادلات

دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} 3 \times 2^x - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5 \times 2^{x+1} - 2^{x+y+1} + 16 = 0 \end{cases} \quad .604$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y) \cdot 2^{y-x} = 3 \end{cases} \quad .605$$

$$\begin{cases} \sqrt[x]{a} \sqrt[y]{a^{-1}} = 1 \\ \sqrt[x]{bn} \cdot \sqrt[y]{b} = n^p \end{cases} \quad .606$$

$$\begin{cases} \log x + \log y = a \\ 2 \log x - 2 \log y = b \end{cases} \quad .608 \quad \begin{cases} \log x - \log y = \gamma \\ \log x + \log y = \delta \end{cases} \quad .607$$

$$\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x^2 + y^2 = 425 \end{cases} \quad .610 \quad \begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad .609$$

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \quad .612 \quad \begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad .611$$

$$\begin{cases} 3^x - 2y^2 = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases} \quad .614 \quad \begin{cases} x^{y+1} = 27 \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad .613$$

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^m = y^n \end{cases} \quad .615 \quad \text{با شرط : } m \neq n$$

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^2 \end{cases} \quad .616 \quad \text{با شرط : } x > 0 \text{ و } y > 0$$

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ a^x = b^y \end{cases} \quad .617 \quad \text{با شرط : } a > 0, y > 0, x > 0, b \neq 1, a \neq 1, a \neq b : b > 0$$

$$\begin{cases} 64^x + 64^y = 40 \\ 64^{x+y} = 12 \end{cases} \quad .619 \quad \begin{cases} x^y = y^x \\ x^2 = y^2 \end{cases} \quad .618$$

$$\begin{cases} x^y = 243 & .621 \\ \sqrt[y]{1024} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 & \end{cases} \quad \begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 & .620 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\left(\sqrt[9]{\frac{1}{5}} \right)^{2x} \right]^{2y} = 5^4 & .622 \\ (7777^{x-y-1})^{x^2+6y^2-60} = 1 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10^{2-\log(x-y)} = 25 & .623 \\ \log(x-y) + \log(x+y) = 1 + 2\log 2 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} (n1x)^{\log m} - (ny)^{\log n} = 0 & .624 \\ n^{\log x} - m^{\log y} = 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10^{2-\log(x-y)} = 250 & .625 \\ \sqrt{x-y} + \frac{1}{2}\sqrt{x+y} = \frac{26-x}{\sqrt{x-y}} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x \times 4^y = 32 & .626 \\ \log(x-y)^2 - 2\log 2 = 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log(x^2 + y^2) - 1 = \log 13 & .627 \\ \log(x+y) - \log(x-y) = 2\log 2 & \end{cases}$$

$$. y > 0 \text{ و } x > 0 : \text{ با شرط } \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \quad .628$$

$$\begin{cases} 3^x \times 2^y = 576 & .629 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 & \end{cases}$$

$$. y > 0 \text{ و } x > 0 : \text{ با شرط } \begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{1}{2} \\ x \cdot y = 16 \end{cases} \quad .630$$

$$\begin{cases} \Delta(\log_y x + \log_x y) = 26 \\ x \cdot y = 64 \end{cases} \quad .631$$

$$\begin{cases} \frac{\log(x-y) - 2\log 2}{1 - \log(x+y)} = 1 \\ \frac{\log x - \log 3}{\log y - \log 4} = -1 \end{cases} \quad .632$$

$$\begin{cases} \log xy = 2\log a + 2\log b + \log\left(2 + \frac{a}{b}\right) \\ \log x - \log y = 2\log a + 3\log b - \log(2a + 3b) \end{cases} \quad .633$$

$$\begin{cases} \log_7 x + \log_7 y + \log_7 z = 2 \\ \log_7 y + \log_7 z + \log_7 x = 2 \\ \log_7 z + \log_7 x + \log_7 y = 2 \end{cases} \quad .634$$

$$\begin{cases} \log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2 + \log_a 9 \\ x + y - 5a = 0 \end{cases} \quad .635$$

$$\begin{cases} x^m = y^n \\ \log_p \frac{x}{y} = \frac{\log_p x}{\log_p y} \end{cases} \quad .636$$

۱۱۶. ترکیب و دو جمله‌ای نیوتون

۶۳۷. عدد k را چنان پیدا کنید که تعداد ترکیبهای n عنصر k به k حداکثر مقدار ممکن باشد ($k < n$).

۶۳۸. n نقطه در صفحه چنان قرار گرفته‌اند که هیچ سه نقطه‌ای بر یک امتداد

نیست ، چند خط راست می توان از این نقاط عبور داد ؟

۶۳۹. روی يك صفحه n نقطه وجود دارد ، تمام خطهایی را که از دو به دوی این نقاط عبور می کنند ، رسم می کنیم . ضمناً میدانیم که هیچ دو خط موازی و هیچ سه خط متقارب نیستند . مطلوبست N ، تعداد نقاط تلاقی این خطوط ، بدون محاسبه n نقطه مفروض.

۶۴۰. عده ای مشغول بازی شطرنج شدند ، بطوریکه هر کدام از آنها با هر يك از دیگران يك بازی کرد ، اگر رویهم ۴۵ بازی انجام شده باشد ، عده شطرنج بازها را پیدا کنید .

۶۴۱. از بین ۱۵ سرباز باید يك دسته سه نفری برای مأموریتی انتخاب کنیم به چند طریق می توان این انتخاب را انجام داد ؟

۶۴۲. از يك دسته ۵۰ نفری سرباز بایستی روزانه ۴ نفر برای پاسداری تعیین شوند ، اگر بخواهیم ترکیب پاسدارها شبیه هم نباشد ، چند دفعه می توان آنها را انتخاب کرد و در این وضع هر نفر چند مرتبه پاسدار خواهد بود ؟

۶۴۳. ثابت کنید :

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = C_{m-2}^n + 2C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2}$$

۶۴۴. ثابت کنید :

$$1 - 10C_{2n}^1 + 10^2C_{2n}^2 - 10^3C_{2n}^3 + \dots - 10^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + 10^{2n} = 81^n$$

۶۴۵. پنجمین جمله عبارت زیر را بدست آورید :

$$\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a} \right)^n ;$$

بشرطی که نسبت ضریب جمله سوم به ضریب جمله دوم آن مساوی $\frac{11}{4}$ باشد .

۶۴۶. اگر در بسط دو جمله ای :

$$(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^n$$

ضریب جمله سوم مساوی ۲۸ باشد ، جمله وسط را پیدا کنید .

۶۴۷. مطلوبست جمله چهارم از بسط دو جمله ای :

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{b-a} + \sqrt[n]{\frac{b^n - a^n}{a}} \right)^n ;$$

بشرطی که ضریب جمله سوم آن مساوی ۲۱ باشد .

۶۴۸. توان n را در $(a+x)^n$ چنان پیدا کنید که ضریب x^6 در آن مساوی $\frac{103}{217}$ باشد .

۶۴۹. در عبارت $(1+x)^n$ مقدار توان n را چنان پیدا کنید که ضریب جمله پنجم آن با ضریب جمله نهم مساوی باشد .

۶۵۰. حداقل مقدار m را پیدا کنید که در بسط عبارت $(1+x)^m$ ، نسبت ضرایب دو جمله مجاور آن مثل ۱۵ : ۷ باشد .

۶۵۱. در بسط دو جمله‌ای : $\left(\sqrt[n]{x} + \frac{y}{x} \right)^n$ جمله‌ای را پیدا کنید که شامل

x نباشد، بشرطی که بدانیم ضریب جمله سوم آن ۵ واحد بیشتر از ضریب جمله دوم آنست .

۶۵۲. در بسط عبارت :

$$\left(a\sqrt[n]{\frac{a}{3}} - \frac{b}{\sqrt[n]{a^2}} \right)^n$$

جمله‌ای را پیدا کنید که در آن a از درجه سوم باشد ، بشرطی که مجموع ضرایب جملات ردیف فرد در بسط دو جمله‌ای مساوی ۲۰۴۸ باشد .
۶۵۳. در بسط دو جمله‌ای :

$$\left(\frac{a\sqrt[n]{a}}{b} + \frac{1}{\sqrt[n]{a^{28}}} \right)^n$$

جمله‌ای را پیدا کنید که مستقل از a باشد ، بشرطی که مجموع ضرایب سه جمله اول آن مساوی ۷۹ باشد .
۶۵۴. در عبارت :

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{b^2}} - \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a^2}} \right)^n$$

جمله شامل b^6 را معین کنید ، بشرطی که نسبت ضریب جمله چهارم به ضریب جمله دوم بسط این عبارت مساوی ۱۸۷ باشد .

۶۵۵. مطلوبست جملات گویا در بسط دو جمله ای زیر :

$$(\sqrt[5]{3} + \sqrt{2})^5$$

۶۵۶. بازاء چه مقدار n ، ضرایب جملات دوم ، سوم و چهارم در بسط عبارت $(x+y)^n$ تشکیل تصاعد حسابی می دهند .

۶۵۷. تمام جملات گویا را در بسط دو جمله ای زیر پیدا کنید :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x} \right)^{12}$$

۶۵۸. مطلوبست سه ضریب متوالی بسط دو جمله ای که به تصاعد حسابی باشند.

۶۵۹. حاصل $(1/0005)^{26}$ را تا ۵/۰۰۱ تقریب بدست آورید .

۶۶۰. طبق رابطه دو جمله ای نیوتون بسط دهید :

$$(a+bi)^6 + (a-bi)^6$$

۶۶۱. يك دو جمله ای نیوتون پیدا کنید که در بسط آن چهار جمله متوالی :

۲۸۰ ، ۵۶۰ ، ۶۷۲ و ۴۴۸ بدست آید .

۶۶۲. جمله پنجم را در بسط عبارت :

$$(\sqrt{1+z} - \sqrt{1-z})^n$$

پیدا کنید ، بشرطی که ضریب جمله سوم آن مساوی ۷۸ باشد .

۶۶۳. در بسط عبارت $(\sqrt[3]{a} + \sqrt{a^{-1}})^{15}$ جمله مستقل از a را بدست

آورید .

۶۶۴. جملات گویا را در بسط دو جمله ای زیر بدست آورید :

$$\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2} \right)^{24}$$

۶۶۵. جمله مستقل از a را در بسط عبارت :

$$\left(a^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{a} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{a}} \right)^n$$

بدست آورید ، بشرطی که ضرایب جملات پنجم و سوم آن بر نسبت ۲ : ۱ باشند .

۶۶۶. اگر مجموع ضریب جمله دوم از اول و ضریب جمله سوم از آخر بسط دوجمله‌ای :

$$\left(p \sqrt[4]{p} - \frac{1}{\sqrt[8]{p^5}} \right)^n$$

مساوی ۷۸ باشد ، جمله مستقل از p را در آن پیدا کنید .

۶۶۷. در بسط دوجمله‌ای زیر چند جمله گویا وجود دارد :

$$\left(\sqrt[2]{x} + \sqrt[4]{x^3} \right)^{100}$$

۶۶۸. کدام جملات در بسط عبارت زیر مستقل از x هستند :

$$\left(\sqrt[4]{a^2 x} + \sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}} \right)^{12}$$

۶۶۹. اگر سه ضریب اول در بسط دوجمله‌ای :

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^n$$

تشکیل تصاعد حسابی بدهند ، همه جملات گویای آنرا بنویسید .

۶۷۰. اگر در بسط دوجمله‌ای $(x + x^{\log x})^5$ ، جمله سوم مساوی ۱۰۰۰۰۰۰ باشد ، مقدار x را محاسبه کنید .

۶۷۱. ضریب جمله شامل x^{4p+3} را در عبارت $\left(x^3 - \frac{1}{x^2} \right)^{2n+1}$ بدست

آورید .

۶۷۲. مجموع مربعات ضرایب را در بسط دوجمله‌ای نیوتون بدست آورید .

۶۷۳. در حاصلضرب زیر، ضرایب x^{n-1} و x^{n-2} را پیدا کنید :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2^2}\right) \left(x + \frac{1}{2^3}\right) \dots \left(x + \frac{1}{2^n}\right).$$

۶۷۴. ثابت کنید که در بسط دو جمله‌ای $(1+i)^{4k+2}$ ، مجموع جملاتی که در ردیف فرد قرار گرفته‌اند، برابر با صفر است.

§ ۱۲. مسائل مختلف

۶۷۵. اعمال زیر را انجام دهید :

$$\frac{\left(7\frac{37}{72} - 5\frac{43}{96}\right) : 1\frac{11}{24} + \left(15\frac{1}{9} - 13\frac{13}{20}\right) \cdot \frac{8}{9}}{\left(\frac{3}{4} \times 50/4 + 24/15 : 2/3 - 10\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5}{16}}$$

۶۷۶. عددی را پیدا کنید که $7/5\%$ آن مساوی عبارت زیر باشد :

$$\frac{\left(8\frac{7}{55} - 6\frac{17}{110}\right) \times 1\frac{3}{217}}{\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{20}\right) : 1\frac{7}{8}}$$

۶۷۷. اعمال زیر را انجام دهید :

$$\frac{210/084 : 12/3 - 53\frac{23}{25} : 4 - 8\frac{1}{7} \times 9\frac{9}{19} \times \frac{11}{120}}{\left(11\frac{3}{4} - 24/2 : 3\frac{3}{5} - 4\frac{11}{42}\right) : 3\frac{4}{63} + 2/35 \times \frac{45}{74}}$$

و تحقیق کنید حاصل آن از $\log \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}$ کوچکتر است.

محاسبه کنید :

$$۱/۷: \frac{(۴/۵ \times ۱/(۶) + ۳/۷۵) \times \frac{۲۹۶}{۴۹۹۵}}{۵} - ۰/۴۱(۶) \quad ۶۷۸$$

(منظور از $۱/(۶)$ کسرمتناوب $۱/۶۶۶...$ و منظور از $۵/۴۱(۶)$ کسرمتناوب $۵/۴۱۶۶...$ می باشد) .

$$\left[۶/۲ + ۳\frac{۹}{۱۶} : \left(-\frac{۲/۷۵}{۱۴: \frac{۲}{۷} - ۲/۵ : \frac{۱}{۱۸}} - \frac{۷}{۲۴} \right) \right] : ۱۲/(۶) \quad ۶۷۹$$

۶۸۰

$$۷\frac{۱}{۲} + ۶/۸(۳) + ۵/(۶) + \frac{۱۳/۷۵ + ۱۲\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲} + ۰/۰۶۲۵} - \frac{\frac{۲}{۹} + ۳/۶(۱)}{۱/۹۱(۶) - ۱\frac{۵}{۶}} \quad ۶۸۱$$

$$\left[\frac{(۰/۸۰۵:۱۰ - ۰/۰۰۷۰۵ \times ۱۰ + ۲\frac{۱}{۳}:۵۰) \times \frac{۵}{۱۷}}{۱۸/۵ - \sqrt{۲۷۲/۲۵}:۱/۱۲۵} + ۱\frac{۵}{۱۶} \right] : \frac{۱۲۷}{۱۴۴}$$

از تساویهای زیر x را بدست آورید :

$$\left[۱/۷: \left(۱\frac{۲}{۳}x - ۳/۷۵ \right) \right] : \frac{۸}{۲۵} = ۱\frac{۵}{۱۲} \quad ۶۸۲$$

$$\left\{ ۱۳\frac{۸}{۹} - \left[\frac{۱۱\frac{۱}{۱۰}}{(۴\frac{۳}{۴} + x)\frac{۴}{۱۱}} - ۲\frac{۷}{۱۵} \right] \times \frac{۱۸۱}{۲۲۲} \right\} : ۱\frac{۱}{۲۴} = ۳\frac{۱}{۳} \quad ۶۸۳$$

۶۸۴. در کدام مبنای عدد شماری، ضرب زیر صحیح است :

$$۳۷۱ \times ۱۱ = ۴۱۸۱$$

۶۸۵. در کدام مبنای عدد شماری، تساویهای زیر صحیح است :

a) $4 \times 13 = 100$;

b) $3 \times 35 = 111$;

c) $5 \times 36 = 114$

۶۸۶. به بینید اعداد ۷۲۲ و ۵۵۴ در چه مبنائی نوشته شده اند ، بشرطی که بدانیم تفاضل آنها در مبنای دهمی مساوی ۱۳۳ است .

۶۸۷. در کدام مبنای عدد شماری تساوی زیر صحیح است :

$$121 - 111 - 101 = 100^2 + 10^2$$

۶۸۸. عدد ۱۲۳۶ مبنای دهمی را در مبنای ۵ بنویسید .

۶۸۹. عدد $(134)_9$ را در مبنای ۳ بنویسید .

۶۹۰. عددی سه رقمی داریم بطوریکه اگر آنرا در مبنای ۶ حساب کنیم مساوی ۸ برابر مجموع دورقم سمت راستش می شود ، اگر در مبنای ۷ حساب کنیم مساوی ۹ برابر مجموع ارقامش می شود و بالاخره اگر آنرا در مبنای ۸ بحساب آوریم برابر با ۲۰ برابر مجموع دورقم سمت چپ خود می شود . مطلوبست این عدد .

۶۹۱. عدد دو رقمی پیدا کنید که مساوی مربع رقم یکان باضافه مکعب رقم دهگان آن باشد .

۶۹۲. عدد سه رقمی پیدا کنید که مربع آن مساوی توان پنجم مجموع ارقام آن باشد .

۶۹۳. آیا کسر $0/1234567891011121314 \dots$ يك کسر متناوب است ؟ (بعد از ممیز همه اعداد طبیعی را پشت سرهم نوشته ایم) .

۶۹۴. چهار دسته کارگر مبلغی دریافت داشتند که اگر کلاً بانرخ ۳٪ برای مدت ۱۶ ماه به مرابحه گذاشته شود ۴۹۲۰ ریال سود می دهد. دسته اول از ۱۳ نفر تشکیل شده بود و ۴ روز کار کردند ، دسته دوم از ۱۱ نفر با ۵ روز کار ، دسته سوم از ۸ نفر با ۶ روز کار و دسته چهارم از ۱۰ نفر با ۵ روز کار . هر دسته چه مبلغی گرفته اند ؟

۶۹۵. عدد ۴۲۰۰۰ را به چهار قسمت چنان تقسیم کنید که نسبت اولی به

دومی مثل ۲:۳ ، دومی به سومی مثل ۴:۵ و سومی به چهارمی مثل ۶:۷ باشد.
 ۶۹۶. در یک ساختمان دو مؤسسه کار می کنند و بابت کرایه ماهیانه ۴۰۰ ریال می پردازند . اگر مؤسسه اول از ساعت ۹ تا ۱۵ و ۳۰ دقیقه و مؤسسه دوم از ساعت ۱۷ و ۳۰ دقیقه تا ۲۳ ساختمان را اشغال کرده باشند ، هر یک چقدر در سال بابت کرایه باید بپردازند ؟

۶۹۷. در حداقل مدت بایستی ۱۲۸۰۰ دست لباس کارگری تهیه شود . به سه کارگاه A و B و C سفارش داده شد . کارگاه A می تواند در هر چهار روز ۸۰۰ دست لباس تهیه کند ، کارگاه B در هر شش روز ۷۲۰ دست و کارگاه C در هر دو روز با اندازه ۴۰٪ آنچه که دو کارگاه A و B در جریان سه روز و نیم تهیه می کنند . بعد از چند روز لباسها تهیه می شود و هر کارگاه چند دست لباس تهیه می کنند ؟

۶۹۸. وقتی که من بسن حالای تو بودم تو نصف سن امروز مرا داشتی و وقتی که تو بسن امروزی من بررسی مجموع سن من و تو ۶۳ سال خواهد شد . سن حالای هر یک از ما چقدر است ؟

۶۹۹. آیا می توان با حرکت اسب از گوشه چپ و پائین صفحه شطرنج به گوشه راست و بالا رسید ، بشرطی که از هر حاشیه فقط یکبار عبور کند .
 ۷۰۰. ایوان و پتروسرگی همراه بازنهایشان آنیا ، یکا ترین و ماری به بازار رفتند . پس از خرید معلوم شد که هر مرد ۶۳۰ ریال بیش از زنش پرداخته است . ضمناً ایوان ۲۳۰ ریال بیش از آنیا ، پتر ۱۱۰ ریال بیش از یکا ترین پرداخته بود . زن و شوهرها را مشخص کنید .

۷۰۱. ثابت کنید که اگر در تساوی $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{4} = 0$ ضرایب a و b و c گویا باشند ، داریم : $a = b = c = 0$

۷۰۲. ثابت کنید ، برای اینکه کسر : $\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1}$ مستقل از x باشد ،

لازم و کافی است که داشته باشیم : $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

۷۰۳. ثابت کنید که اگر مجموع n عامل مثبت مفروض باشد ، حاصل ضرب

آنها وقتی ما کزیم خواهد شد که این عوامل با هم برابر باشند .
۷۰۴. اگر $1 < x < 64$ باشد ، ما کزیم عبارت زیر را پیدا کنید :

$$\log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{1}{x}$$

۷۰۵. میدانیم :

$$x_1 = \sqrt{2}$$

$$x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

.....

مطلوبست حد x_n وقتی که n بسمت بی نهایت میل کند .

معادلات زیر را حل کنید :

$$\log_2 \log_2 \log_2 x = 0 \quad . 706$$

$$\log_2 \log_2 \log_2 \log_2 x = -\infty \quad . 707$$

$$(|x| < 1) \quad x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \sin^2 \frac{\pi}{4} \quad . 708$$

$$1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x \quad . 709$$

۷۱۰. معادله ای بنویسید که همه ریشه های آن عکس ریشه های معادله زیر باشد :

$$10!x^{10} + 9!x^9 + \dots + 2!x^2 + x = 100!$$

۷۱۱. مجموع ۱۰ کسر بصورت زیر را بدون مخرج مشترك گرفتن بدست آورید :

$$\frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \frac{1}{12 \times 13} + \dots$$

۷۱۲. مجموع زیر را بدست آورید :

$$\frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \frac{2}{9 \times 11} + \dots + \frac{2}{59 \times 61}$$

۷۱۳. ساده‌ترین طریق برای تحقیق تساوی زیر کدام است .

$$۷۷۷۸^۲ - ۲۲۲۳^۲ = ۵۵\ ۵۵۵\ ۵۵۵$$

۷۱۴. بازاء چه مقادیری از n مجموع :

$$۱! + ۲! + ۳! + \dots + n!$$

مجذور کامل است ؟

§ ۱۳ مسائل مسطحه

۷۱۵. اگر اضلاع مثلثی a ، b و c باشد ، میانه‌های آنرا محاسبه کنید .
۷۱۶. کدامیک از میانه‌های مثلث بزرگتر است (و کدامیک کوچکتر) ؟
۷۱۷. بامفروض بودن m_a ، m_b و m_c میانه‌های مثلث ، طول اضلاع a ، b و c را محاسبه کنید .
۷۱۸. نسبت مجموع مربعات میانه‌های یک مثلث را به مجموع مربعات اضلاع آن پیدا کنید .
۷۱۹. بامفروض بودن a ، b و c اضلاع مثلث ، طول ارتفاعات آنرا بدست آورید .
۷۲۰. آیا مثلثی با ارتفاعات $h_a = 3$ ، $h_b = 2$ و $h_c = 4$ می‌تواند وجود داشته باشد ؟
۷۲۱. ثابت کنید که مربع نیمساز یک زاویه مثلث برابر است با تفاضل بین حاصلضرب دو ضلع این زاویه و حاصلضرب قطعاتی که این نیمساز روی قاعده جدا می‌کند .
۷۲۲. با در دست داشتن a و b و c اضلاع مثلث ، طول نیمساز β_A را بدست آورید .
۷۲۳. اضلاع مجاور به زاویه قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای مساوی a و b می‌باشند ، طول نیمساز زاویه قائمه را بدست آورید .
۷۲۴. با مفروض بودن دو ضلع a و b از مثلث ، ضلع سوم آنرا بدست آورید ،

بشرطی که بدانیم میانه‌های این دوزلع برهم عمودند .

۷۲۵. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه نیمساز زاویه قائمه در عین حال نیمساز زاویه بین میانه و ارتفاعی است که از همان رأس عبور می‌کنند .

۷۲۶. از مثلثی دوزلع a و b معلوم است و میدانیم که مجموع ارتفاعات وارد بر این دوزلع برابر است با ارتفاع ضلع سوم ، ضلع c را محاسبه کنید .

۷۲۷. مسئله ن . تارتالیا . با کمک يك پرگار ثابت پاره‌خطی را به n قسمت مساوی تقسیم کنید .

۷۲۸. مثلثی را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که بتوان با قسمتهای آن يك مستطیل ساخت .

۷۲۹. مثلث (یا چند ضلعی) مفروض را به مثلثهای متساوی‌الساقین تقسیم کنید.

۷۳۰. ثابت کنید که می‌توان هر مثلث را به ۴ قسمت چنان تقسیم کرد که از کنارهم گذاشتن آنها دو مثلث متشابه با مثلث اصلی بدست آید .

۷۳۱. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بضلع a مفروض است . خطی چنان رسم کنید که اضلاع AB و BC را در نقاط K و N و امتداد ضلع AC را در نقطه M قطع کند و مثلث KNB ، مثلث NCM و چهار ضلعی $AKNC$ هم ارز باشند .

۷۳۲. بین همه مثلثهای محاط در مثلث مفروض ABC ، مثلثی را پیدا کنید که محیطش می‌نیم باشد .

۷۳۳. می‌خواهیم در ساحل رودخانه منبع آبی درست کنیم و از آنجا مستقیماً به دو نقطه A و B لوله‌کشی نمائیم . منبع را در چه نقطه‌ای بسازیم که مجموع مسیر آب از آنجا تا دو نقطه A و B حداقل ممکن باشد .

۷۳۴. روی میز بیلبارد $ABCD$ بطول a و عرض b ، توپ L با فاصله a' از يك كناره و b' از كناره دیگر قرار گرفته است . نقطه K را بر DC چنان پیدا کنید تا اگر ضربه را به توپ L چنان بزنیم که در K بر كناره میز برخورد کند ، دربرگشت از نقطه B عبور کند .

۷۳۵. از کشتی که در جهت جنوب بشمال حرکت می‌کرد ، دو جسم P و Q

در شرق مسیر حرکت دیده شد. بنحوی که امتداد PQ با امتداد حرکت کشتی زاویه ۱۵ درجه می ساخت. در همین لحظه کشتی مسیر خود را عوض کرد و درست در جهت شمال غربی براه افتاد، پس از طی ۵ کیلو متر، جسم P در مشرق و جسم Q در شمال شرقی کشتی بود. فاصله بین P و Q را معین کنید. ۷۳۶. ثابت کنید خطوطی که از يك رأس متوازی الاضلاع به اوساط دو ضلع روبرو وصل می شوند، قطری را که از دو رأس دیگر متوازی الاضلاع می گذرد به ۳ قسمت مساوی تقسیم می کند.

۷۳۷. در متوازی الاضلاع یکی از اضلاع مساوی b و دو قطر آن مساوی d_1 و d_2 است. مطلوبست محیط آن مثال عددی برای:

$$d_2 = 52 \text{ cm} \text{ و } d_1 = 89 \text{ cm}, b = 58 \text{ cm}$$

۷۳۸. ثابت کنید که از تلاقی نیمسازهای يك چهارضلعی غیر مشخص، يك چهارضلعی محاطی بدست می آید.

۷۳۹. اگر اضلاع يك چهارضلعی محاطی مساوی a، b، c، d باشد، طول اقطار آنرا بدست آورید.

۷۴۰. تفاضل بین قطرو ضلع مربعی تقریباً ۶ متر است. طول ضلع مربع و شعاع دایره محیطی آنرا تا ۰/۰۰۱ تقریب پیدا کنید.

۷۴۱. خطی موازی قاعده مثلث ABC چنان رسم کنید که دوزنقه ای با محیط مساوی ۲p بدست آید.

۷۴۲. قطر پنج ضلعی منتظمی را که ضلع آن مساوی a است، بدست آورید.

۷۴۳. اگر اضلاع مثلثی a، b و c باشد فاصله محل تلاقی ارتفاعات را تا سه ضلع پیدا کنید.

۷۴۴. یکی از اضلاع مجاور به زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه ای مساوی a و شعاع دایره محاطی آن مساوی r است. طول وتر c و ضلع دیگر b را بدست آورید.

۷۴۵. اضلاع مجاور به زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه ای را تعیین کنید که وتر آن مساوی c و شعاع دایره محاطی آن مساوی r باشد.

۷۴۶. اگر ارتفاع مثلث متساوی الساقینی مساوی h و شعاع دایره محاطی آن مساوی r باشد، طول اضلاع مثلث را بدست آورید.

۷۴۷. در مثلث قائم الزاویه ای یکی از اضلاع مجاور به زاویه قائمه مساوی ۶ و ارتفاع وارد بر وتر مساوی $\frac{4}{8}$ است. مطلوبست طول ضلع دیگر و شعاع دایره محاطی مثلث.

۷۴۸. اضلاع مجاور به زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه ای ۳ سانتیمتر و ۴ سانتیمتر است. مطلوبست محاسبه طول فاصله بین مرکز دایره محاطی و مرکز دایره محیطی مثلث.

۷۴۹. ثابت کنید که در هر مثلث قرینه محل تلاقی ارتفاعات نسبت به اضلاع بر دایره محیطی مثلث قرار دارد.

۷۵۰. در دایره ای بشعاع R مثلث متساوی الاضلاعی محاط کرده ایم و روی ضلع مثلث مربعی ساخته ایم. مطلوبست شعاع دایره محیطی مربع.

۷۵۱. مثلث ABC باضلاع a ، b و c مفروض است. شعاع دایره محیطی آنرا محاسبه کنید.

۷۵۲. مسئله فرما. روی قطر AB از نیم دایره ANB مستطیلی ساخته ایم که ارتفاع آن AC مساوی با ضلع مربع محاطی دایره است. اگر رئوس C و D را به نقطه دلخواه N از نیم دایره وصل کنیم و خطوط CN و DN قطر دایره را در نقاط E و L قطع کنند، ثابت کنید:

$$AL^2 + BE^2 = AB^2$$

۷۵۳. قضیه بطلمیوس. ثابت کنید که در هر چهار ضلعی محاطی، مجموع حاصلضرب های اضلاع روبرو برابر است با حاصلضرب دو قطر.

۷۵۴. در مثلث متساوی الاضلاع بضلع مساوی a سه دایره چنان محاط کرده ایم که هر یک از آنها بر دو ضلع مثلث و بر دو دایره دیگر مماس باشد. شعاع این دایره ها را معین کنید.

۷۵۵. در دایره ای بشعاع r دو قوس متوالی که وترهای آنها بطولهای a و b می باشد رسم کرده ایم. مطلوبست طول وتر مجموع و تفاضل این دو قوس

۷۵۶. ضلع ۱۵ ضلعی منتظم محاطی را معین کنید .

۷۵۷. ثابت کنید که ضلع ۱۰ ضلعی منتظم محاطی برابر است با قطعه بزرگتر شعاع . بشرطی که به نسبت ذات وسط و طرفین (نسبت طلایی) تقسیم شده باشد .

۷۵۸. اگر ضلع يك ۵ ضلعی منتظم برابر a باشد ، شعاع دایره محیطی آنرا محاسبه کنید .

۷۵۹. دريك ذوزنقه متساوی الساقین نسبت دو قاعده مساوی $۵/۷۵$ و پاره خطی که وسط دوساق را بهم وصل می کند مساوی ۷ متر است . مطلوبست محاسبه شعاع دایره محیطی ذوزنقه .

۷۶۰. روی قاعده مثلث متساوی الساقینی ، بعنوان يك وتر ، دایره ای رسم می کنیم که بر دو ضلع مساوی مثلث مماس باشد . اگر قاعده مثلث a و ارتفاع آن h باشد ، شعاع دایره را بدست آورید .

۷۶۱. بر دایره ای ذوزنقه متساوی الساقینی محیط کرده ایم ، خط واصل بین اواسط دوساق آن مساوی m شده است ، محیط و طول ساق ذوزنقه را بدست آورید .

۷۶۲. دو دایره متحد المرکز مفروض است . ثابت کنید مجموع مربعات فواصل نقطه ای واقع بر محیط يك دایره از دو انتهای قطری از دایره دیگر ، مقداری است ثابت .

۷۶۳. بادر دست داشتن m_a ، m_b و m_c میانه های يك مثلث ، مساحت آنرا بدست آورید .

۷۶۴. مثلثی با اضلاع a ، b و c و مثلث دیگری با اضلاع m_a ، m_b و m_c (میانه های مثلث اول) مفروض است . نسبت مساحت های دو مثلث را پیدا کنید .

۷۶۵. با مفروض بودن h_a ، h_b و h_c ارتفاعات يك مثلث ، مساحت آنرا محاسبه کنید .

۷۶۶. بادر دست داشتن اضلاع a و b از يك مثلث و β_c نیمساز بین این دو ضلع ، مساحت مثلث را بدست آورید .

۷۶۷. با معلوم بودن دو ضلع b و c و نیمساز زاویه بین آنها β_A از يك مثلث ، طول قطعات ضلع سوم و مساحت مثلث را پیدا کنید . ($b=۲۰$ ، $c=۴۵$ و $\beta_A=۲۴$) .

۷۶۸. اضلاع مجاور به زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه ای ۸ متر و ۶ متر اند، از رأس زاویه قائمه عمودی بر وتر رسم کرده ایم، طول این عمود و مساحت مثلثهای کوچکی که بدست می آید پیدا کنید.

۷۶۹. قاعده مثلثی برابر a است. مطلوبست طول قطعه خط موازی قاعده که مساحت مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند ($a = ۱۶\text{cm}$).

۷۷۰. ارتفاع مثلث حاده الزاویه ای مساوی ۲۵ سانتیمتر است. درجه فاصله ای از رأس باید خطی عمود بر این ارتفاع رسم کرد تا مساحت مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم کند.

۷۷۱. ضلع لوزی را پیدا کنید که مساحت آن مساوی Q و نسبت اقطارش مساوی $m : n$ باشد ($Q = ۸۰$ و $m : n = ۵/۸$).

۷۷۲. ضلع يك لوزی مساوی ۲ متر و نسبت اقطارش مساوی ۴ : ۳ میباشد. مساحت آنرا بدست آورید.

۷۷۳. در لوزی ABCD که اقطار آن $d_1 = ۱۵$ و $d_2 = ۲۰$ است، از رأس زاویه منفرجه C دو ارتفاع CE و CF را رسم کرده ایم، مطلوبست مساحت AECF.

۷۷۴. اقطار يك لوزی بر نسبت ۴ : ۳ هستند، مطلوبست نسبت مساحت لوزی به مساحت دایره محاطی آن.

۷۷۵. در مربع بضلع a ، اوساط دو ضلع مجاور را به رأس روبروی آنها وصل کرده ایم، مطلوبست مساحت مثلثی که بدست می آید.

۷۷۶. مربعی بضلع a مفروض است. روی دو ضلع روبرو، و در داخل مربع، مثلثهای متساوی الاضلاعی ساخته ایم. از تلاقی اضلاع این دو مثلث يك چهار ضلعی بدست می آید. نوع این چهار ضلعی، زوایا، اضلاع و مساحت آنرا بدست آورید.

۷۷۷. ثابت کنید که از تلاقی نیمسازهای خارجی يك چهار ضلعی غیر مشخص، يك چهار ضلعی محاطی بدست می آید.

۷۷۸. در ذوزنقه متساوی الساقینی، خط واصل بین اوساط دو ساق مساوی m است. اگر اقطار این ذوزنقه برهم عمود باشند مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

۷۷۹. طول قاعده های ذوزنقه ای برابر a و b است. طول پاره خطی را

پیدا کنید که موازی دوقاعده رسم شود و ذوزنقه را به دو شکل هم ارز تقسیم کند.
 ۷۸۵. مساحت ذوزنقه‌ای را پیدا کنید که بر دایره‌ای بشعاع r محیط و ساق آن مساوی c باشد.

۷۸۱. مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را پیدا کنید که تفاضل بین ضلع و ارتفاع آن مساوی d باشد.

۷۸۲. مساحت ذوزنقه متساوی الساقینی را پیدا کنید که زاویه حاده آن مساوی ۶۵° درجه و دوقاعده آن بترتیب مساوی a و b باشند.

۷۸۳. مساحت ذوزنقه‌ای را پیدا کنید که چهار ضلع آن بترتیب مساوی a و b ، c و d باشند.

۷۸۴. نقطه دلخواه K را در داخل مثلث ABC در نظر گرفته و از آنجا خطوطی به موازات اضلاع مثلث رسم کرده ایم. این خطها مثلث ABC را به شش قسمت تقسیم می کنند که سه تای آنها مثلث اند. مساحت این سه مثلث بترتیب S_1 ، S_2 و S_3 است. مطلوبست مساحت مثلث ABC .

۷۸۵. نقطه M در داخل دایره بشعاع R به فاصله a از مرکز قرار گرفته است. قطری که از M می گذرد رسم می کنیم و سپس دو وتر عمود بر هم از نقطه M عبور می دهیم بطوریکه یکی از آنها با قطر مرسوم زاویه $\alpha = 45^\circ$ بسازد. مساحت چهارضلعی محاطی را بدست آورید که این وترها اقطار آن باشند.
 ۷۸۶. ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایره‌ای مساوی ۹ سانتیمتر است. مطلوبست محاسبه مساحت مربع محاط در همین دایره.

۷۸۷. مساحت مربع، مثلث متساوی الاضلاع و شش ضلعی منتظم محاط در دایره بشعاع R و همچنین نسبت این مساحتها را بدست آورید.

۷۸۸. اگر مساحت و نسبت طول و عرض يك مستطیل معلوم باشد، طول و عرض آنرا بدست آورید.

۷۸۹. اضلاع مثلثی تشکیل تصاعد حسابی داده اند. مساحت این مثلث $\frac{3}{5}$

مساحت مثلث متساوی الاضلاعی است که محیطش مساوی محیط همین مثلث باشد. نسبت اضلاع این مثلث را بدست آورید.

۷۹۰. از بین مثلثهای به قاعده مفروض a و محیط مفروض $2p$ ، سطح کدامیک ماکزیمم است ؟

۷۹۱. از بین مستطیلهای به محیط ثابت $2p$ ، سطح کدامیک ماکزیمم است ؟

۷۹۲. در مثلث ABC خط $AB \parallel A_1B_1$ را چنان رسم کنید که مساحت مستطیل $A_1B_1C_1D_1$ ماکزیمم باشد (C_1 و D_1 تصاویر A_1 و B_1 روی ضلع AB هستند).

۷۹۳. ثابت کنید از بین مستطیلهای با محیط مساوی، مربع حداکثر سطح را دارد.

۷۹۴. مثلث «هرون» را چنان پیدا کنید که طول اضلاع آن سه عدد متوالی باشند.

۷۹۵. اگر طول ضلع یک پنج ضلعی منتظم مساوی a باشد، مساحت آنرا معین کنید.

۷۹۶. مساحت ذوزنقه‌ای را معین کنید که تقاضل طولهای دو قاعده آن مساوی d و طول دو ضلع غیر موازی آن بترتیب مساوی a و b باشد. بشرطی که بدانیم در ذوزنقه می‌توان دایره‌ای محاط کرد.

۷۹۷. وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر است با c . ارتفاع وارد از رأس زاویه قائمه بوتر، و تر را به نسبت ذات وسط و طرفین (به نسبت طلایی) تقسیم می‌کند. مساحت مثلث را بدست آورید.

۷۹۸. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای مساوی m^2 است، شعاع دایره را پیدا کنید.

۷۹۹. از مثلثهایی که در آنها یک ضلع وزاویه روبروی به آن ضلع مقدار ثابتی است، سطح کدامیک ماکزیمم است ؟

۸۰۰. ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای مساوی ۶ سانتیمتر است. مطلوبست مساحت قطعه‌ای از دایره که وترش یکی از اضلاع مثلث باشد.

۸۰۱. ضلع لوزی را حساب کنید، بشرطی که بدانیم قطر کوچکتر لوزی مساوی ضلع آن و مساحت لوزی مساوی مساحت دایره‌ای بشعاع R است.

۸۰۲. ثابت کنید که مساحت دایره بقطر وتر از هر مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مساحت‌های دایره‌هایی که بقطر اضلاع مجاور به زاویه قائمه

رسم می‌شوند.

۸۰۳. قضیه هپوکرات. ثابت کنید مجموع مساحت‌های هلالهائی که بین نیم‌دایره بقطر وتر و نیم‌دایره‌هائی که بقطر اضلاع مجاور به زاویه قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارند برابر است با مساحت خود مثلث.

۸۰۴. AB اضلعی از مربع محاط در دایره به مرکز O فرض می‌کنیم و نیم‌دایره ADB را بقطر AB و در خارج مربع رسم می‌کنیم. پاره خط OD این نیم‌دایره را در نقطه D و دایره اول را در نقطه C قطع می‌کند. ثابت کنید مثلث منحنی‌الضلعی که اضلاع آن بترتیب پاره خط CD و قوسهای AC و AD هستند قابل تربیع است، یعنی میتوان با کمک خط‌کش و پرگار ضلع مربع هم‌ارز آنرا بدست آورد.

۸۰۵. دایره، مربع و مثلث متساوی‌الاضلاعی هم‌ارزند. نسبت محیط‌های آنها را پیدا کنید.

۸۰۶. روی قطر $2r$ از نیم‌دایره‌ای مثلث متساوی‌الاضلاعی ساخته‌ایم. مساحت قسمتی از مثلث را که در خارج نیم‌دایره قرار گرفته است پیدا کنید.

۸۰۷. در دایره بشعاع R ، سه دایره مساوی مماس بردایره اول و دوبدو مماس برهم رسم کرده‌ایم. مطلوبست مساحت مثلث منحنی‌الخطی که بین سه دایره قرار گرفته است.

۸۰۸. در دایره بشعاع r چهار دایره محاط کرده‌ایم، بطوریکه دوبدو برهم و هر کدام بردایره اول مماس باشد، مساحت یکی از این دایره‌ها را بدست آورید.

۸۰۹. چند دایره مساوی می‌توان بیرون دایره‌ای به‌همان شعاع رسم کرد بطوریکه هر یک از آنها بر این دایره و دودایره مجاور خود مماس باشد؟

۸۱۰. محیط دایره‌ای بشعاع R را به ۶ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم، سپس از هر دو نقطه مجاور قوسی چنان عبور داده‌ایم که هر دو قوس مجاور روی محیط دایره اول برهم مماس باشند. مطلوبست مساحت قسمت داخلی دایره مفروض که بین قوسهای مرسوم قرار گرفته است.

۸۱۱. در بیرون دایره مفروضی شش دایره به‌همان شعاع رسم کرده‌ایم، بطوریکه دوبدو برهم و بردایره اول مماس باشند، بر این ۷ دایره مساوی حلقه‌ای که با

دایره اول هم مرکز است محیط می‌کنیم ، بنحوی که مساحت آن مساوی مساحت ۷ دایره باشد ، ثابت کنید عرض این حلقه برابر باشعاع دایره مفروض است .

۸۱۲. مسئله ارشمیدس . نیمدایره ABC مفروض است . از نقطه B عمود BD را بر قطر AC فرود آورده‌ایم و نیمدایره‌های AFD و DHC را در داخل نیمدایره اول یکی بقطر AD و دیگری بقطر DC رسم کرده‌ایم . ثابت کنید مساحت $AFDHCB$ برابر است با مساحت دایره بقطر BD .

۸۱۳. مساحت دایره‌ای بشعاع R را با رسم دایره دیگری ، متحدالمرکز با آن ، به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کنید .

§ ۱۴. مسائل هندسه فضائی

۸۱۴. مساحت مقطع قطری يك مكعب (فصل مشترك مكعب با صفحه‌ای که از دو قطر موازی در دو وجه روبرو می‌گذرد) مساوی S است ، مطلوبست : ضلع مكعب ، قطر قاعده ، قطر مكعب ، سطح کل و حجم آن .

۸۱۵. حجم هرم مربع القاعده‌ای را پیدا کنید که ارتفاع آن مساوی a و سطح مقطع قطری آن مساوی Q باشد ($a = ۱۵m$ و $Q = ۱۲۰m^2$) .

۸۱۶. اضلاع قاعده هرم مثلث القاعده‌ای برابر است با a ، b و c و هر سه زاویه مسطحه رأس این هرم قائمه‌اند . حجم هرم را بدست آورید .

۸۱۷. پاره خطهای OA ، OB و OC دوبرو برهم عمود و به طولهای a ، b و c مفروض‌اند . ثابت کنید که ON فاصله نقطه O تا صفحه‌ای که از نقاط A ، B و C عبور می‌کند برابر است با :

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

۸۱۸. $SABCD$ هرمی است که قاعده آن لوزی $ABCD$ بضلع a و به

زاویه حاده 60° درجه می باشد . یال جانبی هرم $SA = a$ است . ثابت کنید مثلث قائم الزاویه ای وجود دارد که اضلاع آن مساوی SB ، SC و SD باشند .
 ۸۱۹. هرم منتظمی داریم با قاعده چهارضلعی که ارتفاع آن مساوی h و طول یال جانبی آن مساوی a است . مکعبی در آن محاط کرده ایم بطوریکه چهار رأس آن بر چهار یال جانبی و چهار رأس دیگرش بر صفحه قاعده قرار گیرد . ضلع مکعب را محاسبه کنید .

۸۲۰. ضلع قاعده هرم منتظم مربع القاعده ای مساوی $5\sqrt{2}$ و طول یال جانبی آن مساوی 13 است . مطلوبست محاسبه طول ضلع مکعبی که چهار رأس آن بر چهار یال جانبی هرم قرار گرفته باشد .
چهار رأس آن بر چهار سطح است

۸۲۱. در هرم مربع القاعده منتظمی مکعبی چنان محاط کنید که چهار رأس دیگرش بر صفحه قاعده واقع باشد . اگر همه یالهای هرم مساوی و هر یک از آنها مساوی a باشد ، سطح کل و حجم مکعب را بدست آورید .

۸۲۲. سطح جانبی یک مخروط مساوی S است و اگر آنرا روی یک صفحه گسترش دهیم . قطاعی به زاویه 36° درجه بدست می آید . حجم مخروط را بدست آورید .

۸۲۳. سطح جانبی مخروطی دو برابر سطح قاعده آنست . زاویه رأس مخروط را پس از گسترش پیدا کنید .

۸۲۴. حجم جسمی را معین کنید که از دوران یک مثلث متساوی الاضلاع بضلع a دور یکی از اضلاعش بدست می آید .

۸۲۵. مثلث متساوی الساقینی به قاعده a و ارتفاع b مفروض است . اگر آنرا دور قاعده اش دوران دهیم ، حجم جسم حاصل را بدست آورید .

۸۲۶. نسبت حجمهای اجسامی را که از دوران مثلثی دور اضلاعش بدست می آید پیدا کنید (اضلاع مثلث را a ، b و c بگیرید) .

۸۲۷. اضلاع a ، b و c مثلثی را پیدا کنید که از دوران آن دور هر یک از اضلاعش اجسامی بدست آید که بترتیب حجمهائی مساوی سه کره به شعاعهای R ، r و ρ داشته باشند .

۸۲۸. ^{سطح و}حجم جسمی را پیدا کنید که از دوران يك شش ضلعی منتظم دوری یکی از اضلاعش بدست آید (ضلع شش ضلعی را a بگیرید).

۸۲۹. مطلوبست حجم جسمی که دوران يك شش ضلعی منتظم به ضلع a دور قطری که آنرا به دو قسمت مساوی تقسیم می کند، بدست آید. این حجم را با حجم کره محیطی آن مقایسه کنید.

۸۳۰. لوزی را که قطر کوچکترش مساوی ضلع آن a می باشد دور خطی که از انتهای قطر بزرگتر بر این قطر عمود شده است دوران داده ایم. سطح و حجم جسمی که بدست می آید پیدا کنید.

۸۳۱. شش ضلعی منتظمی بضلع a را دور محوری که در صفحه شش ضلعی واقعی است دوران داده ایم. محور دوران موازی یکی از اضلاع شش ضلعی و به فاصله a از مرکز آن قرار دارد. سطح و حجم جسمی که بدست می آید پیدا کنید.

۸۳۲. مستطیلی به اضلاع a و b را دور محوری که از يك رأس آن گذشته و با قطر مستطیل موازی است، دوران داده ایم. سطح و حجم جسمی که بدست می آید حساب کنید.

۸۳۳. مطلوبست نسبت دو حجمی که بترتیب از دوران يك متوازی الاضلاع دور دو ضلع مجاورش بدست می آید.

۸۳۴. قاعده بزرگتر ذوزنقه ای مساوی a و قاعده کوچکتر آن مساوی b و هریک از ساقهای آن مساوی c است. ذوزنقه را دور محوری که از انتهای ضلع a بر آن عمود کرده ایم دوران می دهیم. مطلوبست سطح کل جسمی که بدین ترتیب بدست می آید ($a = 15\text{cm}$ ، $b = 9\text{cm}$ و $c = 5\text{cm}$).

۸۳۵. ثابت کنید که تنها پنج نوع چند وجهی منتظم وجود دارد.

۸۳۶. ثابت کنید که اگر نقطه ای در داخل يك چند وجهی منتظم حرکت کند، مجموع فواصلش از وجوه مقدار ثابتی خواهد بود.

۸۳۷. ثابت کنید پنج مکعب وجود دارد که رؤوس آنها رؤوس يك ۱۲ وجهی منتظم است، هریک از یالهای این مکعبها بر قطری از يك وجه ۱۲ وجهی و هریک از رؤوس ۱۲ وجهی بر دورأس از این پنج مکعب قرار دارد.

۸۳۸. مطلوبست شعاع کره محاطی و شعاع کره محیطی هر يك از چند وجهیهای منتظم ، بشرطی که هر یال چند وجهی مساوی a باشد .

۸۳۹. سطح کل هر يك از چند وجهیهای منتظم را بدست آورید . یال چند وجهی را a فرض کنید .

۸۴۰. اگر یال چند وجهی منتظم برابر a باشد ، حجم آنرا در حالتی پنجگانه بدست آورید .

۸۴۱. اگر سطح کل يك چهار وجهی منتظم با سطح کل يك ۸ وجهی منتظم برابر باشد . نسبت حجم آنها را پیدا کنید .

۸۴۲. یال يك ۸ وجهی منتظم برابر است با a . سطح و حجم کره محاطی آنرا بدست آورید .

۸۴۳. دو چهار وجهی منتظم مساوی را بوسیله يك وجه بهم وصل می کنیم ، بنحوی که در آن وجه مشترك باشند . مراکز ۶ وجه هرم دو گانه ای را که باین ترتیب بدست می آید رئوس يك منشور قائم می گیریم . اگر یال هر يك از چهار وجهیها برابر a باشد ، حجم این منشور را بدست آورید .

۸۴۴. نسبت سطح يك مكعب را به سطح کره محاط در آن پیدا کنید .

۸۴۵. اگر هر یال يك ۲۵ وجهی منتظم برابر a باشد ، نسبت حجم آنرا به حجم کره محاط در آن پیدا کنید .

۸۴۶. ثابت کنید که برای هر چند وجهی که قابل محیط بر کره R باشد ، نسبت حجم به سطح برابر است با مقدار ثابت $\frac{R}{3}$.

۸۴۷. سطح کره ای برابر است با Q ، سطح ۸ وجهی منتظمی را پیدا کنید که در این کره محاط شود .

۸۴۸. در مخروطی که قطر قاعده اش برابر با مولدش می باشد ، کره ای محاط کرده ایم . بشرطی که مولده مخروط برابر a باشد ، سطح و حجم کره محاطی را بدست آورید .

۸۴۹. به کره ای با شعاع R ، مخروطی محیط کرده ایم ، بنحوی که ارتفاع آن دو برابر قطر کره باشد . ثابت کنید سطح کل این مخروط دو برابر سطح

کره و حجم آن دو برابر حجم کره است .

۸۵۰. مخروط ناقصی را به کره‌ای بشاع R محیط کرده‌ایم ، اگر مساحت قاعده بزرگتر مخروط ناقص دو برابر مساحت قاعده کوچکتر آن باشد ، حجم مخروط ناقص را بدست آورید .

۸۵۱. بر کره‌ای به شعاع r ، مخروطی با حجم می‌نیم محیط کنید .

۸۵۲. در کره بشاع R استوانه‌ای با حجم m اکزیم محاط کنید .

۸۵۳. مثلث متساوی‌الاضلاعی را در یک دایره محاط کرده‌ایم . نسبت حجمهای دو جسمی را پیدا کنید که از دوران مثلث و دایره دور قطری که از رأس مثلث می‌گذرد ، بوجود آید .

۸۵۴. مخروط ناقصی به حجم V و ارتفاع h مفروض است . اگر صفحه‌ای از محور مخروط ناقص عبور دهیم مقطع دوزنقه شکلی به سطح m^2 بدست می‌آید ، شعاع هر یک از دو قاعده مخروط ناقص را پیدا کنید .

۸۵۵. کره‌ای بشاع R هم حجم است با مخروط قائمی که سطح جانبی آن سه برابر مساحت قاعده‌اش می‌باشد . ارتفاع مخروط را پیدا کنید .

۸۵۶. سطح جانبی یک مخروط قائم برابر ۶۰ متر مربع و سطح کل آن برابر است با سطح مثلثی به اضلاع ۱۳ ، ۱۴ و ۱۵ متر . مطلوبست شعاع کره‌ای که حجم آن با حجم این مخروط برابر است .

۸۵۷. در مخروطی که رأس آن بطرف پائین قرار گرفته است ، کره‌ای انداخته‌ایم . نسبت حجمهای این دو جسم هندسی مساوی m ، نسبت شعاع قاعده مخروط به شعاع کره مساوی n و ارتفاع مخروط مساوی h است . فاصله مرکز کره را از رأس مخروط پیدا کنید .

۸۵۸. مخروطی داریم که مقطع آن با صفحه‌ای که از ارتفاعش می‌گذرد یک مثلث متساوی‌الاضلاع است . رأس مخروط بطرف پائین است و کره‌ای بشاع r در آن انداخته‌ایم . سپس در مخروط آنقدر آب ریخته‌ایم تا سطح آب بر کره مماس شود. اگر کره را از مخروط خارج کنیم ، آب در چه ارتفاعی خواهد ایستاد ؟

۸۵۹. رأس مخروطی با ارتفاع H و شعاع قاعده R بطرف پائین است . در این

مخروط تا ارتفاع h آب ریخته ایم ، سپس گلوله آهنی به شعاع r در آن انداخته ایم ، بطوریکه کاملاً در آب غوطه ور شده است . در این صورت آب در چه سطحی خواهد ایستاد ؟

۸۶۰. مخروطی را محیط بر کره ای به شعاع r رسم کرده ایم ، اگر نسبت سطح کل مخروط به سطح کره مساوی k باشد ، ارتفاع مخروط را محاسبه کنید .

۸۶۱. مخروطی بر دو کره محیط است . حجم کره بزرگتر ۸ برابر حجم کره کوچکتر که شعاعی مساوی r دارد ، می باشد . سطح جانبی و حجم مخروط را بدست آورید .

۸۶۲. دو کره به شعاع R و r مماس خارج اند . مخروطی بر این دو کره محیط کرده ایم . سطح جانبی مخروط ناقصی را پیدا کنید که قاعده های آن دایره های مماس بر دو کره باشند .

۸۶۳. در کره ای به شعاع R ، استوانه ای محاط کرده ایم ، بطوریکه محور استوانه از مرکز کره می گذرد و قطر قاعده استوانه مساوی شعاع کره شده است . حجم قسمتی از کره که باقیمانده است بدست آورید .

۸۶۴. کره ای بشعاع R مفروض است . در چه فاصله ای از مرکز کره صفحه ای رسم کنیم تا هر می که رأسش در مرکز کره و قاعده اش مربع محاط در دایره مقطع است ، سطح کل مساوی $4m^2$ داشته باشد ؟

۸۶۵. حجم مخروط قائمی را پیدا کنید (با دورقم اعشار) که اگر سطح جانبی آن را روی يك صفحه باز کنیم ، قطاعی به شعاع ۱۵ سانتیمتر و زاویه مرکزی ۱۲۰° درجه بدست آید .

۸۶۶. مطلوبست زاویه بین مولد مخروط با صفحه قاعده آن ، بشرطی که سطح کل این مخروط دو برابر سطح مقطع محوری استوانه ای ، با همین قاعده و ارتفاع ، باشد .

۸۶۷. نیمدایره ای را به مخروطی تبدیل کرده ایم . زاویه رأس را در مقطع محوری مخروط پیدا کنید .

۸۶۸. شعاع قاعده مخروطی را پیدا کنید که حجم آن مساوی V و سطح

کاش مساوی S باشد .

۸۶۹. در داخل کره و در یک طرف مرکز آن دو صفحه موازی به فاصله ۳ سانتیمتر رسم کرده ایم . این دو صفحه دوعرقچین کروی بوجود آورده اند که شعاع قاعده های آنها به ترتیب ۹ سانتیمتر و ۱۲ سانتیمتر است . حجم کره را بدست آورید .

۸۷۰. سطح و حجم کره ای بدست آورید که شعاعش برابر با $\frac{1}{8}$ یال یک وجهی منتظم به سطح $\frac{1}{25}\sqrt{10}$ باشد .

۸۷۱. در یک کره ، مخروطی چنان محاط کرده ایم که ارتفاع مخروط بوسیله مرکز کره به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است . نسبت حجم کره به حجم مخروط را پیدا کنید .

۸۷۲. روی میز یک حلقه قرار گرفته است (منظور از حلقه شکل هندسی است که از دوران دایره ای بشعاع r دور محوری که آنرا قطع نمی کند بدست آید) . اگر سطح کره ای که در داخل این حلقه و مماس بر میز قرار گرفته است مساوی S باشد ، سطح و حجم حلقه را بدست آورید .

۸۷۳. کره ای بسطح S را در مخروط ناقصی محاط کرده ایم . زاویه مولد مخروط ناقص با قاعده بزرگتر مساوی ۶۰ درجه است . سطح جانبی مخروط ناقص را محاسبه کنید .

۸۷۴. کره ای از دو نیم کره ، یکی مسی و دیگری آهنی درست شده است . وزن کره Q کیلوگرم است . از این کره ، مکعبی در آورده ایم که قطر آن مساوی قطر کره است . وزن براده هایی را که از تراش کره بدست آمده است پیدا کنید .

۸۷۵. در استوانه چوب پنبه ای بشعاع R ، سوراخ استوانه شکلی بوجود آورده ایم و آنرا بوسیله یک میله فلزی پر کرده ایم . وزن مخصوص چوب پنبه d و وزن مخصوص میله فلزی مساوی d_1 است . میله فلزی چه شعاعی داشته باشد تا جسم حاصل بتواند در آب فرو رود ؟

۳. مثلثات

۱۵۵. تبدیلات اتحادی در عبارتهای مثلثاتی

۸۷۶. اگر $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ و $\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{5}$ باشد، $\sin 2\alpha + \operatorname{tg} \beta$ را محاسبه کنید.

۸۷۷. اگر $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ باشد، $\cos \alpha$ را محاسبه کنید.

۸۷۸. ثابت کنید:

$$\cos \frac{2\pi}{32} = \frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{4};$$

$$\sin \frac{2\pi}{32} = \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{4}$$

۸۷۹. مطلوبست محاسبه $\sin^2 2\alpha$ ، بشرطی که داشته باشیم:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\cotg^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$$

۸۸۰. اگر $a > 0$ و $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ باشد و داشته باشیم:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - a \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0$$

مقدار $\cos 2\alpha$ را محاسبه کنید.

۸۸۱. اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ و $tg\alpha = -\gamma$ باشد، مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید :

$$\frac{\gamma \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \gamma \sin \alpha}$$

۸۸۲. اگر $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ باشد، مطلوبست محاسبه :

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$$

۸۸۳. اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ ریشه معادله :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

باشند، حاصل عبارت زیر را بدست آورید :

$$a \sin^2(\alpha + \beta) + b \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) + c \cos^2(\alpha + \beta)$$

۸۸۴. اگر داشته باشیم :

$$\sin \alpha + \sin \beta = a$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = b$$

ثابت کنید :

$$\cos(\alpha + \beta) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

۸۸۵. ثابت کنید که حاصل جمع سه کسر بصورت :

$$\frac{a-b}{1+ab}, \frac{b-c}{1+bc}, \frac{c-a}{1+ac}$$

با حاصلضرب آنها برابر است.

۸۸۶. ثابت کنید که اگر : $\cos(2\alpha + \beta) = 1$ باشد، داریم :

$$[tg(\alpha + \beta) - tg\alpha]^2 + 4 = 4 \sec^2 \frac{\beta}{2}$$

۸۸۷. ثابت کنید که با شرط: $\sin\alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin\beta$ ، داریم:

$$tg(\alpha + \beta) = 2tg\alpha$$

۸۸۸. ثابت کنید که تساوی زیر بازاء هیچ مقداری از α صحیح نیست:

$$\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha = 1$$

۸۸۹. ثابت کنید که با شرط: $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\cos\alpha + \alpha \sin\alpha > 1$$

۸۹۰. ثابت کنید که بازاء هر مقدار α نامساوی زیر برقرار است:

$$\sec^4\alpha + \operatorname{cosec}^4\alpha \geq 8$$

عبارتهای زیر را بدون استفاده از جدول محاسبه کنید:

$$\sin \frac{4\pi}{16} + \sin \frac{43\pi}{16} + \sin \frac{45\pi}{16} + \sin \frac{47\pi}{16} \quad ۸۹۱$$

$$\sin \frac{4\pi}{8} + \sin \frac{43\pi}{8} + \sin \frac{45\pi}{8} + \sin \frac{47\pi}{8} \quad ۸۹۲$$

عبارتهای زیر را ساده کنید:

$$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha} \quad ۸۹۳$$

$$\frac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\pi - \alpha)} + \frac{tg(\alpha - \pi) \cos(\pi + \alpha)}{\sec(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} \quad ۸۹۴$$

$$\sqrt{\sin^2\alpha(1 + \cot\alpha) + \cos^2\alpha(1 + tg\alpha)} : \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad ۸۹۵$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{\gamma} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha) + \cos(\pi - \alpha) \sin(-\alpha) + \quad .896$$

$$+ \cos(\pi + \alpha) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{\gamma}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\gamma} + \alpha\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{\gamma\pi}{\gamma} + \alpha\right).$$

$$\frac{\sin(\gamma\pi - \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\gamma} + \alpha\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{\gamma\pi}{\gamma} - \alpha\right) \operatorname{cosec}\frac{\gamma\pi}{\gamma}}{\cos(\gamma\pi + \alpha) \cos\pi} + \quad .897$$

$$+ \frac{\sin(\pi + \alpha) \cos\gamma\pi}{\sin\left(\frac{\gamma\pi}{\gamma} + \alpha\right)}$$

$$\frac{1 - \cos^{\gamma}\alpha}{\sec^{\gamma}\alpha - 1} + \frac{1 - \sin^{\gamma}\alpha}{\operatorname{cosec}^{\gamma}\alpha - 1} - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha)^{\gamma} + \quad .898$$

$$+ \frac{1 - \sin^{\gamma}\alpha}{1 - \cos^{\gamma}\alpha}$$

$$\frac{1 + \cos\alpha + \cos^{\gamma}\alpha + \cos^{\gamma}\alpha}{\gamma \cos^{\gamma}\alpha + \cos\alpha - 1} \quad .899$$

صحت اتحادهای زیر را ثابت کنید :

$$\operatorname{tg}^{\gamma}\alpha + \sec^{\gamma}\beta = \operatorname{tg}^{\gamma}\beta + \sec^{\gamma}\alpha \quad 900$$

$$\sin^{\gamma}\alpha + \cos^{\gamma}\alpha + \gamma \sin^{\gamma}\alpha \cos^{\gamma}\alpha = 1 \quad 901$$

$$\frac{1 - \cos^{\gamma}\alpha + \sin^{\gamma}\alpha}{1 + \cos^{\gamma}\alpha + \sin^{\gamma}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \quad .902$$

$$1 + \gamma \cos^{\gamma}\alpha = \frac{\sin 10 / \Delta\alpha}{\sin^{\gamma} / \Delta\alpha} \quad .903$$

$$\frac{1 - \sin\alpha \cos\alpha}{\cos\alpha (\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha)} \cdot \frac{\sin^{\gamma}\alpha - \cos^{\gamma}\alpha}{\sin^{\gamma}\alpha + \cos^{\gamma}\alpha} = \sin\alpha \quad .904$$

$$1 - \cot \alpha \cot \beta = - \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \quad .905$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \quad .906$$

$$\frac{3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + 10 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{5} + 3}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}} = 3 + 5 \sin \alpha \quad .907$$

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma \cos \alpha} = 0 \quad .908$$

$$\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) + \cos \alpha (1 + \cot \alpha) = \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha \quad .909$$

$$\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \cot \alpha + \gamma \sin \alpha \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha + \cot \alpha \quad .910$$

$$\frac{\gamma \sin(\gamma 5^\circ - \alpha)}{\cos \gamma \alpha} = \cot(\gamma 5^\circ + \alpha) \quad .911$$

$$\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^\gamma}{\cos^\gamma \alpha - \sin^\gamma \alpha} = \sec \gamma \alpha - \operatorname{tg} \gamma \alpha \quad .912$$

$$\frac{\gamma \sin \alpha - \sin \gamma \alpha}{\gamma \sin \alpha + \sin \gamma \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\gamma \alpha}{\gamma} \quad .913$$

$$\operatorname{cosec} \alpha + \sec \alpha = \frac{\gamma \sqrt{\gamma} \cos(\gamma 5^\circ - \alpha)}{\sin \gamma \alpha} \quad .914$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \cot \alpha = \gamma \operatorname{cosec} \gamma \alpha \quad .915$$

$$\frac{1 + \sin \gamma \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \sqrt{\gamma} \cos\left(\frac{\pi}{\gamma} - \alpha\right) \quad .916$$

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}(\gamma 5^\circ + \alpha) \quad .917$$

$$\frac{\gamma \operatorname{tg} \frac{\alpha}{\gamma}}{1 + \operatorname{tg} \gamma \frac{\alpha}{\gamma}} = \sin \alpha \quad .918$$

$$\gamma \operatorname{cosec} \varphi \alpha - \operatorname{cotg} \gamma \alpha = \operatorname{tg} \gamma \alpha \quad .919$$

$$\frac{\gamma \operatorname{cotg} \alpha}{1 + \operatorname{cotg} \gamma \alpha} = \sin \gamma \alpha \quad .920$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{\gamma}} = 1 + \cos \alpha \quad .921$$

$$\operatorname{tg} \gamma \alpha + \sec \gamma \alpha = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \quad .922$$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{1 + \gamma \cos \gamma \alpha}{\cos \gamma \alpha (\operatorname{tg} \gamma \alpha - 1)} = \frac{\gamma}{1 + \operatorname{tg} \alpha} \quad .923$$

$$\frac{\cos \gamma \alpha}{\operatorname{cotg} \gamma \alpha - \operatorname{tg} \gamma \alpha} = \frac{1}{\gamma} \sin \gamma \gamma \alpha \quad .924$$

$$\frac{\sin \gamma \left(\frac{\gamma \pi}{\gamma} + \alpha \right)}{\operatorname{cotg} \gamma (\alpha - \gamma \pi)} + \frac{\sin \gamma (-\alpha)}{\operatorname{cotg} \gamma \left(\alpha - \frac{\gamma \pi}{\gamma} \right)} = 1 \quad .925$$

$$\frac{\sin \gamma \alpha - \operatorname{tg} \gamma \alpha}{\cos \gamma \alpha - \operatorname{cotg} \gamma \alpha} = \operatorname{tg} \gamma \alpha \quad .926$$

$$\frac{\cos \gamma \alpha - \sin \gamma \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha \quad .927$$

$$\gamma (\sin \gamma \alpha + \cos \gamma \alpha) - \gamma (\sin \gamma \alpha + \cos \gamma \alpha) + 1 = 0 \quad .928$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \quad .929$$

$$\wedge \cos \gamma \alpha = \gamma + \gamma \cos \gamma \alpha + \cos \gamma \alpha \quad .930$$

$$\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} \quad .931$$

$$\cos \alpha + \sin \sqrt{\alpha} - \cos \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha} \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \right) \quad .932$$

$$1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{3} \sin(30^\circ + \alpha) \sin(30^\circ - \alpha)}{\cos \sqrt{\alpha}} \quad .933$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha \cdot \cot \sqrt{\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha} \quad .934$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{\sqrt{3} \cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \quad .935$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \sqrt{\alpha})} + \frac{1}{\sin(\beta - \alpha) \sin(\beta - \sqrt{\alpha})} + \\ & + \frac{1}{\sin(\sqrt{\alpha} - \alpha) \sin(\sqrt{\alpha} - \beta)} = \frac{1}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \sqrt{\alpha}}{2} \cos \frac{\beta - \sqrt{\alpha}}{2}} \end{aligned} \quad .936$$

$$1 + \cos \sqrt{\alpha} + \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha \cos \sqrt{\alpha} \cos^2 \alpha \quad .937$$

$$\sin \sqrt{\alpha} + \sin^2 \alpha - \sin^3 \alpha = \sqrt{3} \sin \alpha \sin \sqrt{\alpha} \sin^2 \alpha \quad .938$$

$$\frac{\sin \alpha + \sqrt{3} \sin^2 \alpha + \sin \Delta \alpha}{\sin^2 \alpha + \sqrt{3} \sin \Delta \alpha + \sin \sqrt{\alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \Delta \alpha} \quad .939$$

$$\cos \frac{\sqrt{\alpha} + \beta}{2} - \sin \frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{2} = \cos \alpha \cos \beta \quad .940$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sin \alpha}} = \frac{\sqrt{3} \sin \left(15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} \quad .941$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \sqrt{\alpha} - \sin(\alpha + \beta + \sqrt{\alpha}) = \quad .942$$

$$= \sqrt[3]{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}^3 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^3 \alpha} \times \frac{1 + \operatorname{cotg}^3 \alpha}{\operatorname{cotg}^3 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^3 \alpha}{\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{cotg}^3 \alpha} \quad .943$$

$$\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta - \sin^3(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) \quad .944$$

$$\sin^3 \alpha + \sin^3 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta) = \sin^3(\alpha + \beta) \quad .945$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^3 \alpha + \dots + \operatorname{tg}(n-1) \alpha \operatorname{tg} n \alpha = \quad .946$$

$$= \frac{\operatorname{tg} n \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - n$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \quad .947$$

$$: \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{اولا با شرط} \quad .948$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

$$: \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{ثانیا با شرط}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma$$

$$: \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{با شرط} \quad .949$$

$$\frac{\sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}}{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha} + \frac{2}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$. \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \text{با شرط} \quad .950$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \sqrt[3]{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$: 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ \quad \text{با شرط} \quad .951$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma = \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \gamma$$

$$۹۵۲. \text{ با شرط } \alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ :$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$۹۵۳. \text{ با شرط } \alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ :$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} - ۱ = -2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$۹۵۴. \text{ با شرط } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} :$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$۹۵۵. \text{ با شرط } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} :$$

$$\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = 2 \operatorname{tg} \alpha$$

$$۹۵۶. \text{ با شرط } \alpha + \beta + \gamma = ۳۶۰^\circ :$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} - ۱$$

$$۹۵۷. \text{ با شرط } \alpha + \beta + \gamma + \delta = ۱۸۰^\circ :$$

$$\cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma + \cotg \delta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) \sin(\alpha + \delta)}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta}$$

$$۹۵۸. \text{ با شرط } \alpha + \beta + \gamma = ۳۶۰^\circ :$$

$$\cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} = ۱$$

$$۹۵۹. \text{ با شرط } \beta + \gamma = \alpha :$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = ۱ + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$۹۶۰. \text{ با شرط } \alpha + \beta + \gamma = ۹۰^\circ .$$

$$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$۹۶۱. \text{ با شرط } \alpha = 2\beta \text{ و } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ :$$

$$\sin^2 \alpha = \sin \beta (\sin \gamma + \sin \beta)$$

$$۹۶۲. \text{ ثابت کنید که اگر } n > 1 \text{ باشد و داشته باشیم :}$$

$$\frac{n^2 - 1}{1 + 2n \cos \alpha + n^2} = \frac{1 + 2n \cos \beta + n^2}{n^2 - 1}$$

خواهیم داشت :

$$tg \frac{\alpha}{2} tg \frac{\beta}{2} = \pm \frac{1+n}{1-n}$$

$$۹۶۳. \text{ ثابت کنید که با شرط } tg \frac{\beta}{2} = 4 tg \frac{\alpha}{2} \text{ خواهیم داشت :}$$

$$tg \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{3 \sin \alpha}{5 - 3 \cos \alpha}$$

§ ۱۶. تبدیل عبارتهای مثلثاتی به صورت لگاریتمی

عبارتهای زیر را به سادهترین صورت لگاریتمی تبدیل کنید :

$$۹۶۴. \sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ$$

$$۹۶۵. \sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ$$

$$\text{بشرطی که بدانیم } \sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \text{ است.}$$

$$۹۶۶. \sin 35^\circ + \cos 40^\circ + \sin 55^\circ + \cos 20^\circ$$

$$۹۶۷. \cos 11\alpha + 3 \cos 9\alpha + 3 \cos 7\alpha + \cos 5\alpha$$

$$۹۶۸. \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \quad ۱ - \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$۹۷۰. \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \quad .971$$

$$\frac{\cos \alpha + \sqrt{r} \sin \alpha}{\cos \alpha - \sqrt{r} \sin \alpha} \quad .973 \quad 3 - \operatorname{tg}^2 \alpha \quad .972$$

$$\cotg^2 X - \operatorname{tg}^2 X - 8 \cos^2 X \cotg^2 X \quad .974$$

$$\frac{\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha} \quad .976 \quad \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} \quad .975$$

$$\frac{\sqrt{r}}{r} + \sin \varphi_0^\circ \quad .978 \quad \frac{3 + \Delta \cos \alpha}{3 - \Delta \cos \alpha} \quad .977$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha \quad .980 \quad 2 + \operatorname{tg} 2\alpha + \cotg 2\alpha \quad .979$$

$$\cos \alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha \quad .982 \quad \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha \quad .981$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad .983$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 3\alpha \quad .984$$

مجموعهای زیر را بدست آورید :

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha + \dots + \sin n\alpha \quad .985$$

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \dots + \cos n\alpha \quad .986$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \cos^2 4\alpha + \dots + \cos^2 n\alpha \quad .987$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + \sin^2 4\alpha + \dots + \sin^2 n\alpha \quad .988$$

صحت تساویهای زیر را ثابت کنید :

$$\cos \varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \cos(\varphi + 2\alpha) + \dots + \cos(\varphi + n\alpha) = \quad .989$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \cos\left(\varphi + \frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \dots + \sin(\varphi + n\alpha) = \quad 990$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \sin\left(\varphi + \frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha + \frac{1}{2} \text{tg } \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2^2} \text{tg } \frac{\alpha}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \text{tg } \frac{\alpha}{2^{n-1}} &= .991 \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cotg \frac{\alpha}{2^{n-1}} - 2 \cotg 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} + \dots + \frac{\sin (2^{n-1})\alpha}{\sin \alpha} &= .992 \\ &= \left(\frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \dots \cos 2^k \alpha = \frac{\sin 2^{k+1} \alpha}{2^{k+1} \sin \alpha} .993$$

§ ۱۷. توابع معکوس مثلثاتی

عبارتهای زیر را محاسبه کنید :

$$\sin \left(2 \arccos \frac{3}{5} \right) \quad .995 \quad \cos \left[\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \quad .994$$

$$\sin \left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{1}{17} \right) \quad .996$$

$$\text{tg} \left(\arcsin \frac{12}{13} \right) \quad .997$$

$$\cotg \left(2 \arcsin \frac{2}{3} \right) \quad .998$$

$$\arcsin \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \right) \quad .999$$

$$\times \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \right)$$

$$\arccos\left(\sqrt{3+\sqrt{8}} \times \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{8}}} \times \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{8}}}} \times \sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{8}}}}\right) \quad .1000$$

صحت تساویهای زیر را تحقیق کنید :

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} 1 \quad .1001$$

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} 3 \quad .1002$$

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} \frac{22}{43} \quad .1003$$

$$.1004 \quad \text{با شرط } 0 \leq a \leq 1 :$$

$$2 \arccos a - \arccos(2a^2 - 1) = 0$$

$$2 \arcsin \frac{2}{5} - \arccos \frac{41}{49} = 0 \quad .1005$$

$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 = \pi - \operatorname{arctg} 3 \quad .1006$$

$$\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \quad .1007$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} \quad .1008$$

$$.1009 \quad x \text{ را پیدا کنید، بشرطی که داشته باشیم:}$$

$$8 \operatorname{arctg} \frac{1}{10} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$$

$$.1010 \quad \text{ثابت کنید که اگر داشته باشیم:}$$

$$\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta + \operatorname{arctg} \gamma = \pi$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

۱۰۱۱. بازاء چه مقادیر $\alpha \neq 0$ تساوی زیر برقرار است :

$$\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$$

§ ۱۸. معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید :

$$\sin^2 X + \cos X + 1 = 0 \quad .1013 \quad 3 \sin X = 2 \cos^2 X \quad .1012$$

$$\sin^9 X = \sin^4 X \quad .1015 \quad \sin X + \cos^2 X = \frac{1}{4} \quad .1014$$

$$\operatorname{tg} X = \operatorname{tg}^2 X \quad .1017 \quad \cos^3 X = \cos X \quad .1016$$

$$\sin^3 X = \cos X \quad .1019 \quad \sin^3 X = \cos^2 X \quad .1018$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - X\right) = \operatorname{tg} X \quad .1021 \quad \sin^2 X = \cos^3 X \quad .1020$$

$$\Delta \sin X = \sin^{\Delta} X \quad .1023 \quad \operatorname{tg}^2 X = \cotg^3 X \quad .1022$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3X}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{X}{2}\right) = 0 \quad .1024$$

$$\cdot (m+n \neq 0 : \text{با شرط}) \quad \operatorname{tg} mX \cdot \operatorname{tg} nX = 1 \quad .1025$$

$$\cos^4 X - \sin^{\Delta} X = \sqrt{2} (\cos^{\Delta} X - \sin^4 X) \quad .1026$$

$$\cos^5 X - \sin^5 X - \sin X = 0 \quad .1027$$

$$\sin(8X + 60^\circ) + \sin^2 X = 0 \quad .1028$$

$$\sin^2 2X - \sin^2 X = \sin^2 \frac{\pi}{6} \quad .1029$$

$$\sin^2 X - (\cos X - \sin X)^2 = 0 \quad .1030$$

$$\sin^2 X + \sin^2 2X = 1 \quad .1031$$

$$\sin^2 X + \sin^2 2X - \sin^2 3X = 0 \quad .1032$$

$$\sin^2 X = \cos X - \sin X \quad .1033$$

$$\sin^2 X = \sin^2 X + \sin X \quad .1034$$

$$\sin^2 X + \sin^2 X - \sin X = 0 \quad .1035$$

$$\cos^2 X - \sin^2 X = 0 \quad .1037 \quad \sin X + \cos X = 0 \quad .1036$$

$$\sin^2 X + \frac{1}{2} \sin^2 X = 1 \quad .1038$$

$$2 \sin X - 2(1 - \cos X) = 0 \quad .1039$$

$$\sin^2 X + \cos^2 X = \sin^2 X \quad .1041 \quad \sin^2 X - \cos^2 X = \frac{1}{2} \quad .1040$$

$$\sin^2 \frac{X}{2} + \cos^2 \frac{X}{2} = \frac{\Delta}{\Lambda} \quad .1043 \quad \sin^2 X + \cos^2 X = \frac{\Delta}{\Lambda} \quad .1042$$

$$\frac{1}{\sin^2 X} - \frac{1}{\sec^2 X} - \frac{1}{\cos^2 X} - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 X} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 X} - \quad .1044$$

$$- \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 X} + 2 = 0$$

$$\Lambda \sin^2 X + 9 \cos^2 X - 12 \sin^2 X = 0 \quad .1045$$

$$\cos^2 X - 2 \cos X - 4 \cos^2 \frac{X}{2} = 0 \quad .1046$$

$$4 \sin^2 X + 4 \sin^2 X - 2 \sin X = 2 \quad .1047$$

$$\sin^2 X - 2 \cos^2 X + 2 \sin^2 X = 1 \quad .1048$$

$$\sin X + \sin^2 X + \sin^2 X = 0 \quad .1049$$

$$\sin X + \sin^2 X + \sin^2 X = 1 + \cos X + \cos^2 X \quad .1050$$

$$\sin X + \sin^2 X + \sin^2 X + \sin^2 X = 0 \quad .1051$$

$$1 - \cos^2 2X = \sin^2 X - \cos\left(\frac{\pi}{2} + X\right) \quad .1052$$

$$\sin^2 X (1 + \operatorname{cotg} X) + \cos^2 X (1 + \operatorname{tg} X) = \cos^2 X \quad .1053$$

$$(b \neq 0 \text{ و } a \neq 0) \quad a \sin x + b \cos x = c \quad .1054$$

$$\sqrt{r} \sin x + \cos x - 1 = 0 \quad .1055$$

$$\sin x + \cos x = \frac{\gamma}{\delta} \quad .1057 \quad \sin x + \cos x = 1 \quad .1056$$

$$\Delta \sin x - \gamma \cos x = \varphi \quad .1059 \quad \sin x + \gamma \cos x = 1 \quad .1058$$

$$\Delta (\sin x + \cos x)^2 - 12 (\sin x + \cos x) + \gamma = 0 \quad .1060$$

$$\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{\gamma} \sin 2x \quad .1061$$

$$\sin x + \cos x = \operatorname{cosec} x \quad .1062$$

$$\sin x + \cos x = \sec x \quad .1063$$

$$\sin x + \operatorname{tg} x = \sec x - \cos x \quad .1064$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{\varphi} + x \right) = \gamma \quad .1065$$

$$\sin 2x + \operatorname{tg} x - \gamma = 0 \quad .1066$$

$$\cotg x + \gamma \operatorname{tg} x - \Delta \operatorname{cosec} x = 0 \quad .1067$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0 \quad .1068$$

$$\sin x \cos \frac{x}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\gamma}} = 0 \quad .1069$$

$$\gamma \sin x \sin \gamma x - \gamma \sin^2 \varphi x + 1 = 0 \quad .1070$$

$$\cos x \cdot \cos \gamma x - \cos \gamma x = 0 \quad .1071$$

$$\gamma \cos x \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0 \quad .1072$$

$$\sin x \cdot \sin \gamma x \cdot \sin \gamma^2 x - \frac{1}{\gamma} \sin \varphi x = 0 \quad .1073$$

۱۰۷۴. اگر a, b, m و n اعدادی مثبت و جملات متوالی یک تصاعد حسابی صعودی باشند، معادله زیر را حل کنید :

$$\sin ax \cdot \sin bx = \sin mx \cdot \sin nx$$

$$\sin^2 X + \sin^2 2X + \sin^2 3X = (\sin X + \sin 2X + \sin 3X)^2 \quad .1075$$

$$\sin^{\circ} X + \cos^{\circ} X = \frac{29}{16} \cos^4 2X \quad .1076$$

$$\sin(\pi \cos X) - \cos(\pi \sin X) = 0 \quad .1077$$

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} X) - \operatorname{cotg}(\pi \operatorname{cotg} X) = 0 \quad .1078$$

۱۰۷۹. ثابت کنید که ریشه‌های صحیح معادله زیر، اعدادی زوج هستند :

$$\cos(2\pi X) = \cos(\pi X^2)$$

$$\left| \operatorname{tg} X + \operatorname{cotg} X \right| = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad .1080$$

$$\sin^2 X + \sin^2 2X - n \sin X = 0 \quad .1081$$

در باره جوابهای معادله فوق بحث کنید .

$$\frac{\sin x}{16} - \frac{\cos x}{\sqrt{4}} = 0 \quad .1082$$

$$\frac{2\cos^2 X + 4\cos X - 1}{(\cos^2 X)} = \sec^2 X \quad .1083$$

$$\frac{\sin^2 X - \frac{2}{3}\sin X + \frac{1}{3}}{(\cos X)} = 1 \quad .1084$$

$$\sin(\pi \log X) + \cos(\pi \log X) = 1 \quad .1085$$

$$\log_{\sin X} 2 \times \log_{\sin^2 X} 3 - 1 = 0 \quad .1086$$

$$\log_{\cos X} \sin X + \log_{\sin X} \cos X - 2 = 0 \quad .1087$$

$$\operatorname{tg}^4 X + 2\operatorname{tg}^2 X + 2\operatorname{tg}^2 X - 2\operatorname{tg} X + 1 = 0 \quad .1088$$

$$9 \arcsin(X^2 - 9X + 1/\Delta) = \pi \quad .1089$$

$$2 \arcsin X - \arcsin 2X = 0 \quad .1090$$

$$\arccos X - \arcsin X - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad .1091$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{1-X} - \operatorname{arctg} \frac{1}{1+X} = \frac{\pi}{12} \quad .1092$$

$$\arccos x + \arccos(\sqrt{1-x}) = \arccos(-x) \quad .1093$$

$$\arctg x + \frac{1}{r} \arccos \Delta x = \frac{\pi}{r} \quad .1094$$

$$(\arccos x)^2 - 2 \arccos x + 1 = 0 \quad .1095$$

$$\arctg \frac{x}{r} + \arctg \frac{x}{r} = \arctg x \quad .1096$$

دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = m \\ x + y = n \end{cases} \quad .1098 \quad \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = m \\ x + y = n \end{cases} \quad .1097$$

$$\begin{cases} tg x + tg y = m \\ x + y = n \end{cases} \quad .1100 \quad \begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{r}{r} \\ x + y = \frac{\pi}{r} \end{cases} \quad .1099$$

$$(n \text{ عددی است صحیح}) \quad \begin{cases} tg x - tg y = m \\ x + y = n\pi \end{cases} \quad .1101$$

$$\begin{cases} tg x + tg y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{r}}{r} \end{cases} \quad .1103 \quad \begin{cases} tg x \cdot tg y = m \\ x + y = n \end{cases} \quad .1102$$

$$(n < 1) \quad \begin{cases} tg \frac{x}{r} + tg \frac{y}{r} = m \\ 1 + n \cos y = \frac{1 - n^2}{1 - n \cos x} \end{cases} \quad .1104$$

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{6}(1-2\sqrt{5}) \\ \cos(x-y) = \frac{1}{6}(1+2\sqrt{5}) \end{cases} \quad ۱۱۰۵$$

$\cos x$ و $\cos y$ را بدست آورید .

§ ۱۹. مسائل هندسه مسطحه (مورد استعمال مثلثات)

۱۱۰۶. اگر اضلاع مثلث حاده الزاویه ABC مساوی a ، b و c و زوایای
نظیر آنها بترتیب مساوی α ، β و γ باشند : اضلاع ، زوایا و مساحت مثلث
 NMD را که از وصل پای ارتفاعات مثلث ABC بدست آمده است پیدا کنید.
۱۱۰۷. پای ارتفاعات مثلث حاده الزاویه ای را دوبرو بهم وصل کرده ایم ،
مطلوبست مساحت مثلثی که بدست می آید . بشرط اینکه اضلاع مثلث مفروض
مساوی a ، b و c باشد .

۱۱۰۸. مطلوبست مساحت مثلث متساوی الساقینی که پاره خط واصل بین وسط
قاعده و وسط یکی از ساقها برابر با نصف شعاع دایره محیطی مثلث باشد .
۱۱۰۹. ثابت کنید که حاصلضرب فواصل مرکز دایره محاطی مثلث تا رئوس
برابر است با ۴ برابر حاصلضرب مجذور شعاع دایره محاطی در شعاع دایره
محیطی مثلث .

۱۱۱۰. مسئله شماره ۷۸۵ را ، بشرطی که زاویه α دلخواه باشد ، حل
کنید .

۱۱۱۱. نیمدایره ای را به سه قسمت چنان تقسیم کرده ایم که و ترهای آنها
بر نسبت ۱ : ۲ : ۱ باشند . هریک از قسمتهای نیمدایره را پیدا کنید .

۱۱۱۲. زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه ای را تعیین کنید ، بشرطی اضلاع آن:
اولا) تشکیل تصاعد حسابی بدهند .

ثانیا) به تصاعد هندسی باشند .

۱۱۱۳. زاویه مجاور به قاعده مثلث متساوی الساقینی برابر با α است . اگر

ارتفاع این مثلث با اندازه m از شعاع دایره محاطی آن بیشتر باشد، طول قاعده را بدست آورید.

۱۱۱۴. محیط دایره‌ای به شعاع R را به شش قسمت مساوی تقسیم و نقاط تقسیم را به مرکز دایره وصل کرده‌ایم. یکی از شعاعها را روی شعاع مجاور خود تصویر کرده‌ایم. سپس این تصویر را روی شعاع سوم تصویر کرده‌ایم و تصویر دوم را روی شعاع چهارم و غیره.

مطلوبست طول ششمین تصویر (که روی شعاع اول خواهد بود). R را مساوی ۱۲۸ سانتیمتر در نظر بگیرید.

۱۱۱۵. از کشتی K تا چراغ دریائی به اندازه a میل فاصله است. چراغ دریائی در سمت غرب و به زاویه α با امتداد جنوب دیده می‌شود. کشتی در جهت جنوب غربی چند میل حرکت کند تا چراغ را درست در شمال خود به بیند.

($\alpha = 61^\circ 17' 20''$ ، $a = 5/24$ میل)

۱۱۱۶. اگر شعاع دایره محیطی یک n ضلعی منتظم مساوی r باشد. ضلع، سهم، محیط و مساحت n ضلعی را بدست آورید.

۱۱۱۷. ارتفاع شیئی مورد دسترس AC را بدست آورید (شکل ۵۹ را به بینید).

۱۱۱۸. ارتفاع شیئی غیر قابل دسترس AB را بدست آورید (شکل ۶۰ را به بینید).

۱۱۱۹. عرض رودخانه BC را محاسبه کنید (شکل ۶۱ را ببینید).

۱۱۲۰. فاصله بین دو نقطه غیر قابل دسترس A و B را به دست آورید (شکل ۶۲ را به بینید).

۱۱۲۱. مسئله پاته‌نوت. روی یک صفحه افقی سه نقطه A ، B و C در

نظر گرفته‌ایم که بر یک خط راست واقع نیستند. فواصل بین این نقاط معلوم است: $AB = c$ ، $BC = a$ و $AC = b$. ناظری که در نقطه D واقع بر همین صفحه قرار گرفته است، ضلع AB را با زاویه α و ضلع BC را با زاویه β می‌بیند. موقعیت ناظر یعنی موقعیت نقطه D را بر صفحه پیدا کنید.

۱۱۲۲. فاصله بین سه کومه آتش A ، B و C متقابلاً چنین است:

$$BC = 1/32 \text{ km} \text{ و } AC = 1/2 \text{ km}, AB = 1/4 \text{ km}$$

ناظری که در نقطه D ایستاده است زوایای زیر را اندازه گرفته است:

$\widehat{ADC} = ۲۵^{\circ} ۳۲'$ و $\widehat{BDC} = ۴۰^{\circ}$. مطلوبست فاصله ناظر D از کومه‌های آتش A , B و C بشرطی که بدانیم نقاط C و D در طرفین خط AB قرار گرفته‌اند و داریم:

$$\widehat{ADB} = \widehat{ADC} + \widehat{CDB}$$

۱۱۲۳. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\gamma = ۹۰^{\circ}$) روابط زیر صحیح است:

$$۱) \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{2b^2}{c^2} ; \quad ۲) \sin 2\alpha = \frac{2ab}{c^2} ;$$

$$۳) \cos 2\alpha = \frac{b^2 - a^2}{c^2} ; \quad ۴) \operatorname{cosec} \alpha + \cot \alpha = \frac{a}{c - b} = \frac{c + b}{a}$$

(a و b اضلاع مجاور به زاویه قائمه، c وتر و α و β زوایای حاده مثلث‌اند).
۱۱۲۴. ثابت کنید که در هر مثلث غیر مشخص ABC روابط زیر برقرار است:

$$۱) \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2} ; \quad ۲) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2} ;$$

$$۳) \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{p} ; \quad ۴) \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{b + c}{a} ;$$

$$۵) \frac{a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} ;$$

$$۶) a \sin(\beta - \gamma) + b \sin(\gamma - \alpha) + c \sin(\alpha - \beta) = 0 ;$$

$$۷) \frac{a^2 \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha} + \frac{b^2 \sin(\gamma - \alpha)}{\sin \beta} + \frac{c^2 \sin(\alpha - \beta)}{\sin \gamma} = 0 ;$$

$$۸) \frac{1}{a} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{p^2}{abc} ;$$

$$۹) \sin \frac{\alpha}{r} \sin \frac{\beta}{r} \sin \frac{\gamma}{r} = \frac{r}{4R};$$

$$۱۰) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{p} \operatorname{tg} \frac{\beta}{p} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{p} = \frac{r}{p};$$

(a, b و c اضلاع مثلث، α ، β و γ زوایای مقابل آنها، p نصف محیط و R و r بترتیب شعاع دواير محیطی و محاطی مثلث اند).

۱۱۲۵. اختلاف دو قطر يك لوزی d سانتیمتر و هريك از زوایای منفرجه آن مساوی α است. اضلاع لوزی را محاسبه کنید.

$$(d = ۱۴/۲ \text{ cm}, \alpha = ۱۶۲^\circ ۲۵')$$

۱۱۲۶. مطلوبست محیط ذوزنقه متساوی الساقین محیطی، بشرطی که قاعده بزرگتر آن مساوی a و زاویه حاده اش مساوی α باشد.

۱۱۲۷. لوزی به زاویه حاده α مفروض است، دایره ای در لوزی و دایره دیگری در نصف همین لوزی (که بوسیله قطر کوچکتر بوجود آمده) محاط کرده ایم. نسبت شعاعهای دودایره را پیدا کنید.

۱۱۲۸. زاویه حاده يك متوازی الاضلاع مساوی α و فواصل محل تلاقی اقطار آن تا دوضلع غیرموازی بترتیب مساوی a و b می باشد. اقطار و مساحت متوازی الاضلاع را بدست آورید.

۱۱۲۹. دویروی $P = ۷۲ \text{ kg}$ و $Q = ۵۸ \text{ kg}$ را بريك نقطه جسمی وارد کرده ایم، اگر امتداد نیروها زاویه ای مساوی $۷۲^\circ ۳۰' ۴۴''$ بوجود آورده باشند، نتیجه این نیروها را حساب کنید.

۱۱۳۰. از بالای برجی با ارتفاع $۳۳/۳$ متر پل يك رودخانه دیده می شود. امتداد پل بر صفحه قائمی که از محور برج می گذرد قرار دارد و امتداد اشعه ای که از دوانتهای پل می گذرد با خط قائم بترتیب زوایای $۷'$ و ۵۲° می سازد. طول پل را بدست آورید.

۱۱۳۱. برجی به ارتفاع $۲۲/۵$ متر در نیمروز ۱۰ مارس (وقتی که خورشید تقریباً در محل تلاقی استوا و نصف النهار قرار دارد) سایه ای بطول $۱۶/۵$ متر دارد. عرض جغرافیائی محل را پیدا کنید.

۱۱۳۲. لامپ برقی پایه‌داری را در وسط میز گردی قرار داده‌ایم. ارتفاع پایه را چقدر بگیریم تا حداکثر نور به کناره میز بتابد؟
 ۱۱۳۳. قطعه‌ای از یک دایره را چنان پیدا کنید که طول وتر آن مساوی با محیط بزرگترین دایره محاط در آن باشد.

§ ۲۰. حل مسائل هندسه فضائی به کمک مثلثات

۱۱۳۴. قطر مکعب مستطیلی باوجه کوچکتر جانبی زاویه β ساخته است. از دو ضلع بزرگتر قاعده‌ها صفحه‌ای گذرانده‌ایم، محیط مقطع این صفحه با مکعب مستطیل مساوی m و زاویه این صفحه با صفحه قاعده مساوی α شده است. حجم مکعب مستطیل را بدست آورید.

$$(\beta = 15^\circ 10' \text{ و } \alpha = 33^\circ 28', m = 24/2 \text{ dm})$$

۱۱۳۵. از یک یال مکعبی، صفحه‌ای گذرانده‌ایم که باوجه مجاور یال زاویه α را بسازد. مطلوبست حجم هر یک از قسمتهای مکعب، بشرطی که سطح مقطع مساوی m سانتیمتر مکعب باشد، $\alpha = 40^\circ$ و $m = 76/6 \text{ cm}^2$.

۱۱۳۶. بادر نظر گرفتن شرایط مسئله قبل، نسبت حجمهای V_1 و V_2 را پیدا کنید.

۱۱۳۷. قطریک مکعب مستطیل باصفحه قاعده زاویه α و باوجه جانبی زاویه‌ای مساوی β ساخته‌است، اگر ارتفاع مکعب مستطیل مساوی h باشد، حجم آنرا پیدا کنید $(\beta = 41^\circ 18', \alpha = 34^\circ 34', h = 8/342)$.

۱۱۳۸. وجوه يك متوازی السطوح از لوزیهای مساوی تشکیل شده‌است، بنحوی که سه زاویه مسطحه حاده از آنها بهم رسیده‌اند. اگر ضلع لوزی مساوی a و زاویه حاده مساوی α باشد، حجم متوازی السطوح را پیدا کنید.

۱۱۳۹. قاعده يك هرم، مربعی است به ضلع a ، زوایای دوسطحی که وجوه جانبی با قاعده ساخته‌اند متناسبند با $1:2:4:2$. این زوایا را محاسبه کنید.

۱۱۴۰. منشور قائم مثلث القاعده‌ای داریم که قاعده آن مثلثی متساوی الاضلاع

است، از ضلع قاعده آن صفحه‌ای عبور داده‌ایم. مقطع این صفحه بامنشور مثلثی است که محیط آن دو برابر محیط قاعده است. زاویه بین این صفحه و صفحه قاعده را معین کنید، همچنین نسبت شعاع دایره محاطی مثلث مقطع را به شعاع دایره محیطی قاعده پیدا کنید.

۱۱۴۱. قاعده منشور قائمی مثلث متساوی الاضلاع ABC است. از یک ضلع تاعده و رأس متقابل آن صفحه‌ای عبور داده‌ایم. زاویه بین صفحه مقطع با قاعده مساوی β و مساحت مقطع مساوی S شده است، مطلوبست حجم و سطح کل منشور.

$$(S = 405/92 \text{ و } \beta = 50^\circ 12' 49'')$$

۱۱۴۲. مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) با محیط مساوی $2p$ و زاویه رأس A مساوی α ، قاعده یک منشور قائم است. از ضلع BC قاعده پائین و رأس مقابل آن A_1 از قاعده بالا، صفحه‌ای گذرانده‌ایم؛ اگر صفحه مقطع با صفحه قاعده زاویه‌ای مساوی β تشکیل دهد، حجم منشور را پیدا کنید.

$$(\beta = 55^\circ 20', \alpha = 47^\circ 32', p = 23/75 \text{ cm})$$

۱۱۴۳. با همان شرایط مسئله قبل سطح کل منشور را بدست آورید.

۱۱۴۴. در یک هرم مربع القاعده، یالهای جانبی b با صفحه قاعده زاویه‌ای مساوی α ساخته‌اند. از قطر قاعده صفحه‌ای موازی با یال جانبی رسم کرده‌ایم مساحت مقطع را پیدا کنید ($\alpha = 22^\circ 15', b = 2/4 \text{ m}$).

۱۱۴۵. هرم مربع القاعده منتظمی مفروض است. طول ضلع قاعده این هرم مساوی a و زاویه مسطحه رأس آن مساوی α است. صفحه‌ای از یک قطر قاعده آن موازی یکی از یالهای جانبی گذرانده‌ایم، مطلوبست سطح جانبی هرم مثلث القاعده‌ای که باین ترتیب بوجود می‌آید، قاعده هرم مثلث القاعده را منطبق بر قاعده هرم مربع القاعده بگیرید ($\alpha = 41^\circ 44', a = 7/18 \text{ dm}$).

۱۱۴۶. سطح کل یک هرم مربع القاعده منتظم مساوی S و زاویه بین وجه جانبی با صفحه قاعده مساوی α است. حجم هرم را معین کنید:

$$(\alpha = 71^\circ 34', S = 4/162 \text{ m}^2)$$

۱۱۴۷. قاعده یک هرم لوزی است که قطر کوچکتر آن مساوی d و زاویه حاده آن مساوی α است. هر یک از وجوه جانبی آن با صفحه قاعده زاویه‌ای مساوی

β ساخته اند . سطح کل هرم را بدست آورید .

$$(\beta = 52^\circ 18', \alpha = 43^\circ 16', d = 22/35)$$

۱۱۴۸. ضلع قاعده يك هرم منتظم مربع القاعده مساوی a و زاویه مسطحه رأس

آن مساوی α است . مطلوبست محاسبه سطح جانبی و حجم هرم .

$$(\alpha = 32^\circ 23', a = 23/9 \text{ cm})$$

۱۱۴۹. قاعده يك هرم ، لوزی است به ضلع مساوی a و زاویه حاده مساوی β .

زوایای دو وجهی مجاور قاعده مساوی α است . مطلوبست حجم و سطح کل هرم .

$$(\alpha = 35^\circ 17', \beta = 50^\circ 25', a = 25/3 \text{ cm})$$

۱۱۵۰. قاعده هرمی ، لوزی است به ضلع مساوی a . دو وجه جانبی هرم بر

صفحه قاعده عمود و زاویه ای مساوی β بایکدیگر می سازند و دو وجه جانبی

دیگر با صفحه قاعده زاویه ای مساوی α می سازند . مطلوبست سطح جانبی هرم .

$$(\beta = 106^\circ 50', \alpha = 69^\circ 16', a = 11/58 \text{ m})$$

۱۱۵۱. قاعده يك هرم ، متوازی الاضلاعی است که اقطار آن زاویه ای مساوی

α بایکدیگر می سازند . ارتفاع هرم که از محل تلاقی اقطار قاعده عبور می کند

مساوی است با h ، وجوه نامساوی جانبی با صفحه قاعده زوایائی مساوی

β و γ می سازند ، حجم هرم را پیدا کنید .

$$(\gamma = 43^\circ 15', \beta = 52^\circ 17', \alpha = 34^\circ 19', h = 27/8 \text{ cm})$$

۱۱۵۲. هریک از یالهای جانبی هرم مربع القاعده منتظمی مساوی a و با صفحه

قاعده زاویه ای مساوی α می سازند . سطح جانبی و حجم هرم را پیدا کنید .

$$(\alpha = 53^\circ 29', a = 19/7 \text{ cm})$$

۱۱۵۳. در هرم مربع القاعده منتظمی از ضلع قاعده صفحه ای گذرانده ایم که

با قاعده زاویه ای مساوی β ساخته است ، مطلوبست مقطعی که باین ترتیب

بدست می آید ، بشرطی که سهم هرم مساوی a و زاویه وجه جانبی با صفحه

قاعده مساوی α باشد $(\beta = 39^\circ 45', \alpha = 62^\circ 35', a = 10/75 \text{ dm})$.

۱۱۵۴. هرم مثلث القاعده منتظمی داریم که یال جانبی آن با صفحه قاعده زاویه ای

مساوی α ساخته است و فاصله وسط ضلع مقابل باین یال از قاعده تا این

yal مساوی k است . حجم هرم را پیدا کنید .

۱۱۵۵. قاعده يك هرم مثلثی است با زوایای مساوی α و β . ارتفاع هرم مساوی h و زاویه یال جانبی با صفحه قاعده مساوی γ است. حجم هرم را پیدا کنید.

۱۱۵۶. دريك هرم منتظم مثلث القاعده ای هريك از رئوس قاعده بفاصله h از از وجه روبرو قرار دارند. سطح جانبی هرم را پیدا کنید. بشرطی که بدانیم میل سهم هرم نسبت به قاعده مساوی α است.

۱۱۵۷. قاعده يك هرم، مثلثی است با زوایای مساوی α و β . میل هريك از یالهای جانبی نسبت به صفحه قاعده مساوی γ است. اگر شعاع کره محیطی هرم مساوی R باشد، حجم هرم را پیدا کنید.

۱۱۵۸. قاعده يك هرم، مثلث قائم الزاویه ای است که زاویه حاده آن مساوی α است. هريك از یالهای جانبی هرم مساوی h است و با صفحه قاعده زاویه ای مساوی β می سازند. حجم هرم را پیدا کنید.

$$(\beta = 40^\circ 30', \alpha = 73^\circ 20', h = 30/75m)$$

۱۱۵۹. قاعده هرم مثلث القاعده ای، مثلث متساوی الساقینی است که هريك از ساقهای آن مساوی h و زاویه بین دو ساق مساوی α است. یالهای جانبی هرم با ارتفاع آن زاویه ای مساوی β می سازند. حجم هرم را پیدا کنید.

۱۱۶۰. قاعده يك هرم، مثلث متساوی الساقینی است که طول هريك از از ساقهای آن مساوی h بوده و باهم زاویه ای مساوی α می سازند. زاویه یال جانبی هرم با صفحه قاعده مساوی β است. مطلوبست سطح مقطع هرم با صفحه ای که از ارتفاع و رأس زاویه α می گذرد.

$$(\beta = 70^\circ 26' 18'', \alpha = 56^\circ 17' 43'', h = 5)$$

۱۱۶۱. دو هرم مثلث القاعده منتظم دارای ارتفاع مشترك هستند، رأس هريك از هرمها بوسط قاعده هرم دیگر قرار دارد و یالهای جانبی یکی، یالهای جانبی دیگر را قطع می کند. یال جانبی اولی، I ، با ارتفاع زاویه ای مساوی α می سازد و یال جانبی دوم با ارتفاع زاویه β می سازد. مطلوبست حجم قسمت مشترك دو هرم.

۱۱۶۲. سطح جانبی استوانه ای را بر صفحه ای گسترده ایم، اقطار شکل

مسطحه‌ای که بدست می‌آید با قاعده زاویه‌ای مساوی α می‌سازند و طول هر يك برابر است با d . حجم استوانه را معین کنید .

$$(d = 15/786, \alpha = 48^\circ 10')$$

۱۱۶۳. از مرکز قاعدهٔ باین يك استوانه صفحه‌ای عبور داده‌ایم که با صفحهٔ قاعده زاویه‌ای مساوی α می‌سازد ، این صفحه قاعدهٔ بالا را در وترى بطول b قطع کرده است . اگر قوس این وتر مساوی β باشد ، حجم استوانه را پیدا کنید .

۱۱۶۴. زاویهٔ رأس يك مخروط روی مقطع محوری آن مساوی α است . مطلوبست زاویهٔ مرکزی در گسترده سطح جانبی مخروط .

۱۱۶۵. سطح کل مخروطی برابر است با S . زاویهٔ مولد مخروط با صفحهٔ قاعده برابر است با α . مطلوبست محاسبهٔ حجم مخروط .

$$(\alpha = 69^\circ 41', S = 185 \text{ cm}^2)$$

۱۱۶۶. مطلوبست حجم مخروط قائمی که اگر سطح جانبی آنرا روی يك صفحه به گسترانیم ، قطاع دایره‌ای بدست آید که وتر آن مساوی a و زاویهٔ مرکزی آن مساوی α باشد ($\alpha = 72^\circ 8' 36''$, $a = 8/345$) .

۱۱۶۷. از دو مولد يك مخروط ، که با هم زاویه‌ای مساوی α ساخته‌اند ، صفحه‌ای عبور داده‌ایم که با صفحهٔ قاعده زاویه‌ای مساوی β ساخته است . سطح مقطع برابر است با Q . مطلوبست ارتفاع مخروط .

۱۱۶۸. شاعهای دو قاعدهٔ مخروط ناقص بترتیب برابر است با R و r . مولد مخروط با صفحهٔ قاعده زاویه‌ای مساوی α ساخته است . مطلوبست محاسبهٔ سطح جانبی و حجم مخروط ناقص .

۱۱۶۹. نسبت مساحت‌های دو قاعدهٔ مخروط ناقصی برابر است با 4 ، مولد مخروط ناقص مساوی l و با صفحهٔ قاعدهٔ باین زاویه‌ای مساوی α می‌سازد . حجم مخروط را پیدا کنید .

۱۱۷۰. يك لوزی به ضلع مساوی a و زاویهٔ حادهٔ مساوی α رادور محوری که از رأس زاویهٔ حاده بر ضلع آن عمود شده است ، دوران داده‌ایم . سطح

جسمی را که باین ترتیب بدست می آید پیدا کنید .

۱۱۷۱. باحفظ شرایط مسئله قبل حجم و سطح جسم دوار را پیدا کنید ، بشرطی که $a = ۱۲^m$ و $\alpha = ۵۴^\circ ۲۷'$ باشد .

۱۱۷۲. متوازی الاضلاعی داریم که یکی از اقطار آن مساوی d می باشد و این قطر باد و ضلع متوازی الاضلاع زوایائی مساوی α و β می سازد. این متوازی الاضلاع را دور محوری که از رأس بر قطر d عمود شده است ، دوران داده ایم . حجم و سطح جسم دوار حاصل را بدست آورید .

۱۱۷۳. باحفظ شرایط مسئله قبل ، حجم و سطح جسم دواری را پیدا کنید که دور محوری که از رأس موازی قطر d رسم شده است ، دوران پیدا کرده باشد .

۱۱۷۴. متوازی الاضلاع ABCD به اضلاع a و b و زاویه حاده α مفروض است . متوازی الاضلاع را دور محوری که از A موازی قطر متوازی الاضلاع رسم شده است ، دوران داده ایم . سطح و حجم جسمی که بدست می آید پیدا کنید .

۱۱۷۵. ذوزنقه ای داریم که قاعده بزرگتر آن مساوی b و قاعده کوچکترش مساوی a است ، زوایای مجاور به قاعده بزرگتر این ذوزنقه بترتیب مساوی α و β است . این ذوزنقه را دور قاعده بزرگتر دوران داده ایم ، حجم جسم دواری که باین ترتیب بدست می آید پیدا کنید .

۱۱۷۶. مسئله قبل را بشرط : $b = ۳۲/۳۷۵^m$ و $a = ۱۷/۲۲۵^m$ ، $\alpha = ۶۱^\circ ۲۹' ۱۳''$ و $\beta = ۴۲^\circ ۳۰' ۲۷''$ حل کنید .

۱۱۷۷. مثلث متساوی الساقینی با زاویه مجاور قاعده مساوی α و ساق مساوی b مفروض است . این مثلث را دور محوری که از انتهای قاعده به موازات ساق مثلث رسم شده است ، دوران داده ایم . حجم جسم حاصل را بدست آورید .

۱۱۷۸. سطح کل مخروطی مساوی S و زاویه رأس مخروط روی مقطع محوری آن مساوی α است . مطلوبست شعاع کره ای که هم ارز با این مخروط است .
($\alpha = ۱۱۵^\circ ۲۸'$ ، $S = ۵۲۸/۵۶ \text{ cm}^2$)

۱۱۷۹. در قاعده استوانه ای ، وتر مساوی ضلع n ضلعی منتظم محاط در این

قاعده رسم کرده ایم. اگر دو انتهای این وتر را به مرکز قاعده دیگر وصل کنیم، مثلثی به مساحت مساوی Q و زاویه رأس مساوی α بدست می آید. سطح جانبی و حجم استوانه را بدست آورید.

۱۱۸۰. سطح کل مخروطی برابر با S است. مولد این مخروط با صفحه قاعده زاویه ای برابر α ساخته است. حجم هرم محاط در این مخروط را پیدا کنید که قاعده آن Π ضلعی منتظم محاط در قاعده باشد.

۱۱۸۱. مخروطی داریم که حجم آن مساوی V و زاویه بین مولد و ارتفاع آن مساوی α است. در این مخروط هرمی با قاعده پنج ضلعی منتظم محاط کرده ایم. مطلوبست حجم هرم ($V = ۸۸۰۰$ ، $\alpha = ۴۳^\circ ۳۶' ۸''$).

۱۱۸۲. در استوانه ای که شعاع قاعده آن مساوی R است، هرمی محاط کرده ایم که قاعده آن مثلث متساوی الاضلاع محاط در قاعده استوانه و رأس آن بر محیط قاعده دیگر واقع است.

میدانیم که دو وجه جانبی هرم بر صفحه قاعده آن عمود است و وجه سوم با قاعده زاویه ای مساوی α می سازد. سطح جانبی هرم را بدست آورید.

$$(\alpha = ۵۳^\circ ۵۰' , R = ۸/۲۳^m)$$

۱۱۸۳. در يك مخروط هرمی محاط کرده ایم، بنحوی که قاعده آن مثلث قائم الزاویه ای است و وجه جانبی آن که از یکی از اضلاع مجاور به زاویه قائمه قاعده می گذرد با قاعده زاویه ای مساوی α ساخته است. اگر طول مولد مخروط مساوی l باشد و با صفحه قاعده زاویه ای مساوی β ساخته باشد، حجم هرم را پیدا کنید ($l = ۱۲/۷^{\text{dm}}$ ، $\alpha = ۶۲^\circ ۱۴'$ ، $\beta = ۵۴^\circ ۱۹'$).

۱۱۸۴. کره ای را در مخروطی محاط کرده ایم و میدانیم که حجم کره برابر است با حجم قسمتی از مخروط که بین کره و رأس مخروط قرار گرفته است. مطلوبست محاسبه نصف زاویه رأس مخروط روی صفحه ای که از محور آن گذشته است.

۱۱۸۵. در قاعده مخروطی، مربعی به ضلع a سائبیتر محاط کرده ایم. صفحه ای از رأس مخروط و یکی از اضلاع این مربع گذرانده ایم، مقطع این صفحه با سطح جانبی مخروط مثلثی است که زاویه رأس آن مساوی α شده است. حجم

مخروط را بدست آورید $(\alpha = 66^\circ 52', a = 63/146 \text{ cm})$.

۱۱۸۶. کره ای به حجم v را در مخروطی که مولد آن با صفحه قاعده اش زاویه ای مساوی α ساخته است، محاط کرده ایم. حجم مخروط را محاسبه کنید $(\alpha = 56^\circ 13', v = 84/736 \text{ m}^3)$.

۱۱۸۷. مولد يك مخروط با صفحه قاعده زاویه ای مساوی α ساخته است، مساحت قاعده مخروط مساوی S است. کره ای در این مخروط محاط کرده ایم. حجم مخروطی را پیدا کنید که رأس آن رأس مخروط اصلی و قاعده آن دایره مماس کره با مخروط اصلی باشد $(\alpha = 56^\circ 32', S = 18/25 \text{ cm}^2)$.

۱۱۸۸. در مخروطی کره ای محاط کرده ایم. شعاع دایره تماس کره با سطح جانبی مخروط مساوی r است. شعاع کره، که از يك نقطه محیط این دایره عبور کرده است با صفحه این دایره زاویه ای مساوی α می سازد. حجم مخروط را پیدا کنید.

۱۱۸۹. مولد مخروطی با صفحه قاعده آن زاویه ای مساوی β ساخته است و مجموع این مولد با شعاع قاعده مخروط مساوی m است. مطلوب است مساحت کره ای که در این مخروط محاط شده است.

۱۱۹۰. رأس يك مخروط تو خالی را بطرف پائین گرفته ایم و کره سنگینی بشعاع r در آن انداخته ایم. سپس آنقدر آب در مخروط ریخته ایم تا سطح آب بر کره مماس شود (تمام زیر کره را آب گرفته است). ارتفاع آب را در مخروط، قبل و بعد از آنکه کره را از آن خارج کنیم، پیدا کنید.

۱۱۹۱. بر مخروطی کره ای محیط کرده ایم که مساحت دایره عظیمه آن مساوی Q است. اگر مولد مخروط با صفحه قاعده آن زاویه ای مساوی α بسازد، حجم مخروط و کره های محیطی و محاطی آنرا بدست آورید.

۱۱۹۲. در مخروط ناقصی کره ای محاط کرده ایم. نسبت سطح جانبی مخروط به سطح کره مثل $m : n$ است. زاویه بین مولد و قاعده بزرگتر مخروط را معین کنید و نسبت شعاعهای دو کره محاطی و محیطی مخروط را محاسبه کنید $(m : n = 2)$.

۱۱۹۳. در مخروطی کره‌ای محاط کرده‌ایم که مساحت دایره عظیمه آن مساوی Q است. مطلوبست سطح کل مخروط بشرطی که زاویه رأس مخروط روی مقطع محوری آن مساوی α باشد. ($\alpha = 54^\circ 32'$, $Q = 48/36$).

۱۱۹۴. بر کره‌ای بشعاع r مخروطی محیط کرده‌ایم که مولد آن با صفحه قاعده‌اش زاویه‌ای مساوی α می‌سازد. سطح کل و حجم مخروط را بدست آورید. ($\alpha = 32^\circ 18' 15''$, $r = 3/842 \text{ cm}$)

۱۱۹۵. در کره‌ای بشعاع R ، مخروطی محاط کرده‌ایم که مولد آن با صفحه قاعده‌اش زاویه‌ای مساوی α ساخته است. حجم مخروط را محاسبه کنید.

($R = 2/4$, $\alpha = 64^\circ 48' 24''$)

۱۱۹۶. در کره‌ای به شعاع R ، هرمی محاط کرده‌ایم، قاعده این هرم مستطیلی است که زاویه بین دو قطر آن برابر α است. یالهای جانبی هرم با صفحه قاعده، زاویه‌ای مساوی φ ساخته‌اند. حجم هرم را بدست آورید.

($R = 12/58 \text{ cm}$, $\varphi = 26^\circ 17'$, $\alpha = 35^\circ 24'$)

۱۱۹۷. شعاع قاعده یک مخروط برابر است با R و مولد آن با صفحه قاعده زاویه‌ای مساوی α ساخته است. در این مخروط یک رشته کره محاط کرده‌ایم بطوریکه کره اول بر صفحه قاعده و سطح جانبی مخروط مماس باشد و هر یک از کره‌های بعد بر سطح جانبی مخروط و کره قبل از خود مماس باشد. مطلوبست حد مجموع حجمهای این کره‌ها، بشرطی که تعداد آنها بی‌نهایت زیاد شود.

($\alpha = 52^\circ 49' 55''$, $R = 25$)

۱۱۹۸. در منشور قائمی که قاعده آن یک مثلث قائم الزاویه است، کره‌ای محاط شده است. ارتفاعی که از رأس مثلث قائم الزاویه قاعده بروتر رسم می‌شود برابر است با h و بایکی از اضلاع مجاور به زاویه قائمه، زاویه‌ای مساوی α می‌سازد. حجم منشور را پیدا کنید.

($\alpha = 20^\circ$, $h = 1/72$)

۱۱۹۹. در هرم منتظم مربع القاعده‌ای یک کره محاط کرده‌ایم. مطلوبست سطح کره بشرطی که ضلع قاعده هرم مساوی a و زاویه مسطحه رأس هرم برابر است با α ($\alpha = 41^\circ 44'$, $a = 10/75 \text{ dm}$).

۱۲۵۵. قاعده يك هرم مثلث متساوی الساقینی است که هرساق آن برابر است با b . دو وجه جانبی هرم که از دوساق عبور می کنند بر قاعده عمودند و وجه جانبی سوم با صفحه قاعده زاویه ای مساوی α ساخته است. زاویه بین دو ساق از مثلث متساوی الساقین هم مساوی α است مطلوبست شعاع کره ای که در هرم محاط شده است.

۱۲۵۱. با حفظ شرایط مسئله قبل شعاع کره محیطی هرم را بدست آورید.

۱۲۵۲. در هرم منظم مربع القاعده ای، هریک از یالهای جانبی مساوی b و زاویه مسطحه رأس برابر α است. بقطر ارتفاع هرم کره ای ساخته ایم. مطلوبست سطحی از هرم که در داخل این کره واقع باشد.

۱۲۵۳. حجم يك چهار وجهی منتظم برابر است با $\sqrt{41272}$ دسیمتر مکعب مطلوبست سطح کل این چهار وجهی و اندازه هریک از زوایای دو وجهی آن.

۱۲۵۴. مطلوبست حجم هرمی که قاعده آن ۱۵ ضلعی منتظمی است، بشرطی که بدانیم ارتفاع هرم با هریک از یالهای جانبی زاویه ای برابر $23^\circ 17'$ می سازد و شعاع دایره محیطی قاعده مساوی $12/4$ سانتیمتر است.

۱۲۵۵. هرم مربع القاعده منتظمی داریم که یال جانبی آن مساوی b می باشد و با صفحه قاعده زاویه ای مساوی α می سازد. در هرم استوانه متساوی الاضلاعی محاط کرده ایم، بنحوی که سطح جانبی آن بر قاعده هرم و دایره های دو قاعده آن بر همه وجوه جانبی هرم مماس باشند. شعاع قاعده استوانه را پیدا کنید.

۱۲۵۶. استوانه قائم و مخروط قائمی دارای ارتفاعات مساوی هستند، نسبت سطح جانبی استوانه به سطح جانبی مخروط مثل $m : n$ است. علاوه بر آن میدانیم که مولد مخروط با صفحه قاعده آن زاویه ای مساوی α می سازد. نسبت حجم استوانه به حجم مخروط را پیدا کنید.

۱۲۵۷. زاویه رأس يك مخروط قائم مساوی α و شعاع قاعده آن مساوی R است. رأس مخروط را بعنوان مرکز يك کره انتخاب می کنیم و شعاع کره را چنان انتخاب می کنیم که سطح کره مخروط را به دو قسمت هم ارز تقسیم کند. شعاع کره را محاسبه کنید.

۱۲۰۸. ضلع يك شش ضلعی منتظم برابر است با a . مطلوبست محاسبه حجم جسمی که از دوران این شش ضلعی دور یکی از اضلاعش بدست می آید.

۱۲۰۹. دردایره ای بشعاع R و تری رسم کرده ایم که قوس آن برابر است با β . این قطعه دایره رادورقظری از دایره که در خارج آن واقع است و بایکی از شعاعهای جانبی آن زاویه ای مساوی α می سازد، دوران داده ایم حجم جسمی که باین ترتیب بدست می آید پیدا کنید.

$$(\beta = 60^\circ, \alpha = 48^\circ 52', R = 6/325 \text{ cm})$$

۱۲۱۰. شعاع کره ای برابر است با R . مطلوبست حجم قطاع کروی که زاویه مرکزی متناظر آن برابر α باشد.

۱۲۱۱. سطح منطقه ای از زمین را پیدا کنید که بین عرضهای φ_1 و φ_2 قرار گرفته باشد. شعاع کره زمین را R فرض کنید ($\varphi_1 > \varphi_2$).

۱۲۱۲. رأس مخروطی را مرکز کره ای در نظر گرفته ایم. این کره بر صفحه قاعده مخروط مماس است و حجم مخروط را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده است. مطلوبست زاویه رأس مخروط روی مقطع محوری آن.

۱۲۱۳. هرم مثلث القاعده منتظمی داریم که رأس قاعده آن از وجه مقابلش به فاصله b قرار دارد. مطلوبست سطح کل مخروطی که در این هرم محاط شده باشد، بشرطی که بدانیم سهم هرم با صفحه قاعده آن زاویه ای مساوی α ساخته است.

۱۲۱۴. دريك استوانه مکعب مستطیلی محاط کرده ایم. مطلوبست سطح جانبی استوانه، بشرطی که بدانیم ضلع بزرگتر قاعده مکعب مستطیل برابر با a و زاویه حاده بین اقطار آن α می باشد و قطر مکعب با وجه کوچکتر جانبی زاویه ای مساوی β می سازد

۱۲۱۵. دريك استوانه به مولد l ، هرمی محاط کرده ایم که قاعده آن مثلث متساوی الاضلاع محاط در یکی از قاعده های استوانه و رأس آن بر قاعده دیگر استوانه واقع است.

ضمناً میدانیم که دو وجه جانبی هرم بر قاعده آن عمود است و وجه سوم با قاعده زاویه ای مساوی α می سازد. سطح جانبی هرم را پیدا کنید.

۱۲۱۶. ضلع يك ۷ ضلعی منتظم برابر است با a . حجم جسمی را پیدا کنید که از دوران این ۷ ضلعی دوریکی از اضلاعش بدست آید.

§ ۲۱. مسائل و تمرین‌های مختلف

۱۲۱۷. رئوس A, B, C از مثلث ABC را به نقاط A_1, B_1, C_1 واقع بر اضلاع مقابل (ونه رئوس) وصل کرده‌ایم. ثابت کنید که اواسط پاره خطهای AA_1, BB_1, CC_1 بر يك امتداد قرار ندارند.

۱۲۱۸. از نقطه O واقع در داخل مثلث ABC عمودهای t_a, t_b, t_c را بر اضلاع آن فرود آورده‌ایم. ثابت کنید:

$$\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} = 1$$

۱۲۱۹. سه آبادی A, B, C بر يك خط راست واقع نیستند. جاده مستقیمی از نقطه A عبور دهید که کوتاهترین فاصله دو نقطه B و C از آن يك اندازه باشد.

۱۲۲۰. ثابت کنید که مساحت چهار ضلعی که قابل محاط در دایره و قابل محیط بردایره‌ای باشد برابر است با جذر حاصلضرب اضلاع آن.

۱۲۲۱. ثابت کنید که اگر مجموع زوایای حاده يك دوزنقه مساوی ۹۰ درجه باشد، پاره خطی که وسط دو قاعده را بهم وصل میکند برابر است با نصف تفاضل دو قاعده.

۱۲۲۲. از نقطه A واقع در خارج دایره، قاطعی رسم کنید که بوسیله دایره به دو قسمت مساوی تقسیم شود.

۱۲۲۳. ثابت کنید که فاصله يك نقطه از محیط دایره تا وترى از دایره برابر است با واسطه هندسی فواصل دو انتهای وتر از مماس بردایره در نقطه مفروض.

۱۲۲۴. ثابت کنید که اگر دو وتر AB و CD در نقطه E (غیر از مرکز دایره) برهم عمود باشند، مجموع مربعات پاره خطهای این وترها برابر است با مربع قطر دایره.

۱۲۲۵. روی سطح يك مکعب سه نقطه چنان پیدا کنید که از آنها قطر مکعب

با کوچکترین زاویه دیده شود .

۱۲۲۶. مکعب مستطیل به ابعاد ۸ دسیمتر ، ۸ دسیمتر و ۲۷ دسیمتر را به چهار قسمت چنان تقسیم کنید که بتوان با آنها يك مكعب ساخت .

۱۲۲۷. فنجانى بشکل نیم کره است پراز آب و سپس آنرا به زاویه ۴۵ درجه کج کرده ایم . ثابت کنید آبی که در فنجان باقی میماند در حدود ۱۲٪ تمام آب است .

۱۲۲۸. درجه فاصله‌ای از مرکز کره بشعاع R صفحه‌ای رسم کنیم تا سطح قطعه‌کروی را به نسبت $m : n$ تقسیم کند . بشرطی که قوس مقطع اصلی مساوی α باشد .

۱۲۲۹. اگر هواپیمائی با ارتفاع h از سطح زمین بالا رفته باشد ، خلبان آن چند کیلو متر مربع از سطح زمین را خواهد دید ؟

۱۲۳۰. صفحه‌ای که از يك نقطه عبور می‌کنند ، فضا را به چند قسمت تقسیم می‌کنند . بشرطی که هیچ سه صفحه‌ای از يك خط عبور نکرده باشند . ۱۲۳۱. ثابت کنید :

$$\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

۱۲۳۲. ثابت کنید :

$$\sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

۱۲۳۳. ثابت کنید که بازا $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ نامساوی زیر برقرار است :

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x (\cos x - \sin x)} > 8$$

۱۲۳۴. ثابت کنید که اعداد زیر تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند:

$$u_1 = \cos x + i \sin x ;$$

$$u_2 = \cos 2x + i \sin 2x ;$$

$$\dots$$

$$u_n = \cos nx + i \sin nx$$

مجموع آنها را محاسبه کنید .

$$۲ \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{۲۳۹} = \frac{\pi}{۴} \quad ۱۲۳۵. \text{ ثابت کنید :}$$

$$۱۲۳۶. \text{ بشرطی که } \frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi \text{ باشد، مطلوب است :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\alpha}{۲} \cos \frac{\alpha}{۲^2} \cos \frac{\alpha}{۲^3} \dots \cos \frac{\alpha}{۲^n} \right)$$

۴ . اوراق امتحانی

مسائل و سئوالات

§ ۲۲. مسائل ، قضایا و سئوالات مربوط به امتحانات شفاهی

(a) حساب و جبر

۱۲۳۷. دستگاه عدد شماری چیست ، از چه دستگاههای عدد شماری اطلاع دارید ؟

۱۲۳۸. عدد ۲۴۰ را به قسمتهائی برنسبتهای زیر تقسیم کنید :

$$۵ : ۶/۲۵ : ۸/(۳)$$

۱۲۳۹. عدد ۳۶۰ را برنسبت اعداد زیر تقسیم کنید :

$$\frac{1}{10} : \frac{1}{12} : \frac{1}{15} : \frac{1}{20}$$

۱۲۴۰. عددی را پیدا کنید که $۲/۶\%$ آن مساوی ۹ باشد .

۱۲۴۱. عددی پیدا کنید که $\frac{۵}{۱۲}$ آن مساوی ۳۵ باشد .

۱۲۴۲. در ۲۰۰۰ سال قبل دیوار بزرگ چین را ساخته اند که طولی مساوی ۲۴۰۰ کیلومتر ، عرضی مساوی ۶ متر و ارتفاعی مساوی ۷/۵ متر دارد. حجم دیوار را پیدا کنید .

۱۲۴۳. دوعدد نام ببرید که حاصلضرب آنها برابر با خارج قسمت آنها باشد.

۱۲۴۴. کسری را نام ببرید که اگر به صورت و مخرج آن يك مقدار اضافه کنیم . مقدار آن تغییر نکند .

۱۲۴۵. بعد از چند سال ودیعه‌ای را که با نرخ سالانه ۳٪ به بانک سپرده‌ایم دو برابر می‌شود.

۱۲۴۶. می‌خواهیم تعداد تقریبی درختهای جنگلی را در محدوده معینی بشماریم. به چه ترتیب باید عمل کنیم؟

۱۲۴۷. آیا درست است که همیشه واسطه حسابی دو عدد مثبت و نامساوی، از واسطه هندسی آنها بزرگتر است؟

۱۲۴۸. ثابت کنید در بسط دو جمله‌ای نیوتون با هر توان زوج، بزرگترین ضریب دو جمله‌ای عددی است زوج.

۱۲۴۹. مطلوب است شرط لازم و کافی برای اینکه یکی از ریشه‌های کثیرالجمله‌ای مساوی صفر باشد.

۱۲۵۰. نقاط متناظر با دو عدد مختلط مزدوج، روی صفحه بچه ترتیب قرار می‌گیرند؟

۱۲۵۱. عبارت زیر را بصورت ضرب تبدیل کنید:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

۱۲۵۲. کسر زیر را ساده کنید:

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$$

۱۲۵۳. عبارت $(x - y)$ را بر $(x^n - y^n)$ تقسیم کنید.

۱۲۵۴. صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$(ad + bc)^2 + (ac - bd)^2 = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$$

۱۲۵۵. ثابت کنید اگر داشته باشیم: $x + x^{-1} = a$ ، خواهیم داشت:

$$x^3 - x^{-3} = a(a^2 - 3)$$

۱۲۵۶. آیا دو معادله زیر هم‌ارزند؟

$$a \log x^2 = c ; 2a \log x = c$$

۱۲۵۷. حل دستگاه معادلات چه معنایی دارد؟

۱۲۵۸. بازاء چه مقادیری از a معادله زیر ریشه منفی دارد ؟

$$\frac{2a+5}{3} = \frac{5ax+1}{4}$$

۱۲۵۹. حاصل عبارت زیر را بدست آورید :

$$\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{12\frac{1}{6} - (1-i)^8 : 1\frac{1}{3}}$$

۱۲۶۰. اگر یکی از ریشه های معادله :

$$x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10 = 0$$

برابر $1 - 2i$ باشد ، بقیه ریشه های آنرا بدست آورید .

۱۲۶۱. جسمی به وزن M کیلو گرم در آب باندازه m کیلو گرم وزن خود را از دست می دهد ، اگر این جسم از دو فلز با وزن مخصوصهای q و p درست شده باشد ، وزن هریک از فلزها را بطور جدا گانه پیدا کنید .

۱۲۶۲. نسبت واسطه حسابی دوعدد به واسطه هندسی آنها برابر $25 : 24$ است ، نسبت دوعدد را پیدا کنید .

۱۲۶۳. وقتی که $a < 0$ است ، منحنی تابع زیر بچه ترتیب خواهد بود ؟

$$y = ax^2 + bx + c$$

۱۲۶۴. منحنی تابع $y = |x|$ را رسم کنید .

۱۲۶۵. منحنی تابع $y = x^2 + \frac{60}{x}$ را رسم کنید و به کمک آن ریشه های حقیقی معادله زیر را بدست آورید .

$$x^2 + \frac{60}{x} - 10x - 5 = 0$$

۱۲۶۶. از رابطه زیر x را بدست آورید :

$$x = a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$$

۱۲۶۷. از رابطه $\log_{125} x = 0/6$ مقدار x را بدست آورید.

۱۲۶۸. اگر لگاریتم عدد $0/1$ مساوی $1/3$ - شده باشد، مبنای لگاریتم را پیدا کنید.

۱۲۶۹. نامساوی زیر را حل کنید :

$$\sqrt{2x+1} < \frac{2(x+1)}{2-x}$$

۱۲۷۰. حاصل C_{100}^{99} را محاسبه کنید.

۱۲۷۱. معادله $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^2$ را حل کنید.

۱۲۷۲. از روابط زیر x و n را بدست آورید :

$$\frac{A_x^{n-3}}{A_x^{n-2}} = \frac{1}{8} ; \frac{C_x^{n-3}}{C_x^{n-2}} = \frac{5}{8}$$

۱۲۷۳. حاصل عبارت زیر را بدست آورید :

$$(4\sqrt{3}+8)\left[\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) + \frac{3-2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}} + \dots\right]$$

۱۲۷۴. آیا می توان سه عدد چنان پیدا کرد که درعین حال هم به تصاعد حسابی و هم به تصاعد هندسی باشند ؟

۱۲۷۵. دو عدد حقیقی پیدا کنید که مجموع آنها با حاصل ضربشان برابر باشد.

۱۲۷۶. مطلوبست عددی که اگر ۱۲ برابر آن را به مکعبش اضافه کنیم، باشش برابر مجذور آن با اضافه عدد ۳۵ برابر باشد.

۱۲۷۷. مطلوبست محاسبه يك عدد سه رقمی که مساوی با مجموع فاکتوریل های ارقامش باشد.

۱۲۷۸. چه عملی روی عدد و مبنای لگاریتم آن می توان انجام داد تا حاصل لگاریتم تغییر نکند ؟

۱۲۷۹. ثابت کنید که سه مقدار $\sqrt[3]{2}$ تشکیل تصاعد هندسی می دهند.

۱۲۸۰. محاسبه کنید :

$$\log_y \sqrt[3]{124} + \frac{1}{3}$$

۸

۱۲۸۱. بدون استفاده از جدول ثابت کنید :

$$\frac{1}{\log_7 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$$

۱۲۸۲. آیا درست است که اگر مجموع دو عدد مثبت مقدار ثابتی باشد ،

حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که دو عدد برابر باشند ؟

۱۲۸۳. اگر $a > 1$ باشد کدام بزرگترند :

$$\log^3 a \text{ یا } \log \log \log a$$

۱۲۸۴. اگر بدانیم که عدد ۷ لگاریتم عدد ۲۱۸۷ می باشد . مبنای لگاریتم

چقدر است ؟

۱۲۸۵. ریشه های مثبت معادله زیر را پیدا کنید : $x^x = x$

۱۲۸۶. چند ریاضی دان روسی و چند ریاضی دان شوروی را نام ببرید .

(b) هندسه .

۱۲۸۷. پاره خط a را به نسبت ذات وسط و طرفین (نسبت طلایی) تقسیم کنید .

۱۲۸۸. ثابت کنید قطر و ضلع مربع را نمی توان بایک واحد اندازه گرفت .

۱۲۸۹. ثابت کنید از بین مستطیل های به محیط مساوی ، سطح بیشتر متعلق به مربع است .

۱۲۹۰. ثابت کنید که اگر پای ارتفاعات مثلثی را بهم وصل کنیم ، مثلث جدیدی

بدست می آید (مثلث ارتفاعیه) که همین ارتفاعات نیمسازهای زوایای آن

هستند .

۱۲۹۱. ثابت کنید که با میانهای هر مثلث می توان مثلث دیگری ساخت .

۱۲۹۲. مطلوبست طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای که شعاع دایره محاطی

آن مساوی ۲ سانتیمتر و طول شعاع دایره محیطی آن مساوی ۵ سانتیمتر

باشد .

۱۲۹۳. مجموع دو ضلع مجاور به زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه ای

 $a + b = k$ و طول وتر آن مساوی c می باشد ، مطلوبست محاسبه مساحت

این مثلث .

۱۲۹۴. اگر ارتفاع مثلثی را m برابر بزرگ وقاعده آنرا n برابر کوچک کنیم ، درمساحت آن چه تغییری حاصل می شود ؟

۱۲۹۵. مطلوبست مساحت مربعی که مجموع اقطار ومحیط آن مساوی S باشد.

۱۲۹۶. چند قضیه را نام ببرید که برای اثبات آنها استفاده ازاصل موضوع اقلیدس لازم است .

۱۲۹۷. اضلاع مجاور به زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه ای با دو عدد صحیح بیان شده اند . مطلوبست این دو عدد بشرطی که مجموع آنها مساوی با عدد مساحت مثلث باشد .

۱۲۹۸. مثلثی را پیدا کنید که اضلاع ومساحت آن بوسیله ۴ عدد صحیح متوالی بیان شوند .

۱۲۹۹. مساحت يك شش ضلعی منتظم برابر است با S . محیط آنرا محاسبه کنید .

۱۳۰۰. اضلاع ۵ ضلعی منتظم ، ۶ ضلعی منتظم و ۱۰ ضلعی منتظم بر حسب شعاع دایره محیطی آن بترتیب چنین اند :

$$\frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} ; R ; \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

ثابت کنید که مربع ضلع ۵ ضلعی برابر است با مجموع مربعات اضلاع ۶ ضلعی و ۱۰ ضلعی (مسئله اقلیدس) .

۱۳۰۱. آیا می توان کف اطاق را با آجرهای بشکل ۱۰ ضلعی و ۱۵ ضلعی منتظم فرش کرد ؟

۱۳۰۲. ثابت کنید که مجموع فواصل نقطه ای واقع در داخل يك چند ضلعی منتظم از اضلاع آن مقداری است ثابت .

۱۳۰۳. آیا يك چند ضلعی محاط در دایره می تواند زوایای مساوی و اضلاع نامساوی و یا اضلاع مساوی بازوایای نامساوی داشته باشد ؟

۱۳۰۴. با کدام چند ضلعی های منتظم می توان سطح اطاق را فرش کرد ؟

۱۳۰۵. آیا می توان بر هر چهار ضلعی مفروض ، دایره ای محیط کرد ؟

۱۳۰۶. بادر نظر گرفتن يك شش ضلعی منتظم محیط در دایره و چهار ضلعی منتظم محیط بردایره ، ثابت کنید نامساوی زیر برقرار است :

$$3 < \pi < 4$$

۱۳۰۷. ضلع ۱۲ ضلعی منتظم محیط در دایره را بر حسب شعاع دایره محاسبه کنید .

۱۳۰۸. ضلع ۱۵ ضلعی منتظم محیط در دایره را بر حسب شعاع دایره محاسبه کنید .

۱۳۰۹. اضلاع ۵ ضلعی منتظم محیط در دایره ای را امتداد داده ایم تا دو بدو یکدیگر را قطع کنند ، مجموع پنج زاویه ای که در نقاط تلاقی بدست می آید محاسبه کنید .

۱۳۱۰. چهار نقطه بر محیط دایره ای چنان قرار گرفته اند که قوسهای واقع بین این نقاط بر نسبت ۵ : ۴ : ۲ : ۱ هستند ، مطلوبست محاسبه زاویه منفرجه بین خطوطی که از وصل نقاط غیر مجاور بدست آمده است .

۱۳۱۱. دو قاعده دوزنقه ای بترتیب مساوی a و b هستند . دایره ای بر این دوزنقه محیط و دایره دیگری در آن محیط کرده ایم . مطلوبست محاسبه ارتفاع و ساقهای دوزنقه .

۱۳۱۲. مجموع محیط و قطر دایره ای برابر است با l ، مطلوبست مساحت این دایره .

۱۳۱۳. محیط دایره ای بوسیله يك وتر به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است ، مطلوبست محاسبه مساحت قطعه کوچکتری که بوسیله این وتر بوجود آمده است .

۱۳۱۴. ثابت کنید که مساحت يك حلقه مدور که بین دو دایره متحدالمرکز واقع است ، برابر است با مساحت دایره ای که قطر آن برابر است با وتری از دایره بزرگتر که بردایره کوچکتر مماس باشد .

۱۳۱۵. اضلاع مثلثی بترتیب برابرند با ۱۲ ، ۱۴ و ۱۶ . بمرکز هریک از سه رأس دایره ای رسم کرده ایم ، بطوریکه هر دایره بردو دایره دیگر مماس باشد . شعاع هریک از دایره ها را پیدا کنید .

۱۳۱۶. در دایره‌ای بشعاع R دو قوس متوالی با وترهای بطولهای a و b رسم کرده‌ایم. مطلوبست طول وتری که قوس آن مساوی مجموع دو قوس وترهای مفروض باشد.

۱۳۱۷. اگر n نقطه بر صفحه‌ای واقع باشند، حداکثر چند خط می‌توان رسم کرد که هر یک از آنها از دو نقطه مفروض عبور کرده باشد.

۱۳۱۸. مکعبی بضلع a مفروض است. گوشه‌های مربع را بوسیله صفحاتی که از اواسط یا لهای متقارب گذشته‌اند قطع کرده‌ایم. مطلوبست حجم جسمی که باین ترتیب بدست می‌آید.

۱۳۱۹. مطلوبست حجم ۸ وجهی منتظمی که رئوس آن بر مرکز وجوه مکعبی قرار گرفته باشد، بشرطی که طول ضلع مکعب برابر با a باشد.

۱۳۲۰. اندازه حجمهای سه مکعب بر نسبت $m : n : p$ می‌باشد. اگر مجموع حجمهای این سه مکعب برابر V باشد، حجم هر یک را پیدا کنید.

۱۳۲۱. مطلوبست سطح کل هرم منتظمی که قاعده آن مثلث متساوی‌الاضلاعی محیط بر دایره بشعاع r باشد و حجم آن مساوی با ۳ برابر حجم مکعبی باشد که ضلع آن مساوی قطر این دایره است.

۱۳۲۲. در کره‌ای بشعاع R مکعبی محاط کرده‌ایم. سطح این مکعب را بدست آورید.

۱۳۲۳. سطح کل مخروط متساوی‌الاضلاعی * با سطح کل استوانه متساوی‌الاضلاعی * برابر است. نسبت حجمهای آنها را پیدا کنید.

۱۳۲۴. تعداد چند وجهیهای منتظم چقدر است؟ تعریف هر یک از آنها را بیان کنید.

۱۳۲۵. از گسترش یک مخروط روی صفحه، نیم دایره‌ای بشعاع R بدست آمده است. حجم مخروط پیدا کنید.

۱۳۲۶. شرح زندگی ایوان نیکولایوویچ لباچوسکی را بنویسید.

(*) استوانه‌ای را متساوی‌الاضلاع گویند که ارتفاع آن با قطر قاعده‌اش برابر باشد. همچنین مخروطی را متساوی‌الاضلاع گویند که مولد آن با قطر قاعده‌اش برابر باشد.

c. مثلثات

۱۳۲۷. باچه شرطی نامساوی زیر صحیح است ؟

$$\sin \alpha + \cos \alpha < 1$$

۱۳۲۸. علامت $\sin 2$ و $\cos 2$ را پیدا کنید .۱۳۲۹. کدام بزرگترند : $tg 1$ یا $tg 1^\circ$; $\sin 2$ یا $\sin 2^\circ$ ؟

۱۳۳۰. منحنی توابع زیر را رسم کنید :

$$y = \sin x ; y = \cos x ; y = tg x ; y = \sin x + \cos x.$$

۱۳۳۱. دوره تناوب تابع $y = \sin^2 x + \cos^3 x$ را پیدا کنید .

۱۳۳۲. دوره تناوب تابع زیر را معین کنید :

$$y = 3 \sin \frac{x}{2} + 4 \left(\cos^2 \frac{x}{4} + \sin^2 \frac{x}{3} \right)$$

۱۳۳۳. روابطی را که در مثلثات برای محاسبه مساحت مثلث بکار می‌روند

بنویسید و رابطه زیر را که یکی از آنهاست ثابت کنید :

$$S = p^2 tg \frac{\alpha}{2} tg \frac{\beta}{2} tg \frac{\gamma}{2}$$

که در آن $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ می‌باشد .

۱۳۳۴. رابطه زیر را ثابت کنید :

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

۱۳۳۵. قضیه تانژانتها را ثابت کنید و کاربرد آنرا در حل مسائل ذکر کنید .

۱۳۳۶. روابط زیر را ثابت کنید :

$$R = \frac{abc}{4S} ; r = (p-a) tg \frac{\alpha}{2}$$

که در آنها R و r به ترتیب شعاع دایره‌های محیطی و محاطی ، p نصف محیط ، S مساحت و α زاویه روبرو بضلع a است .

۱۳۳۷. روابط کلی بین دوزاویه‌ای را بنویسید که سینوس آنها با هم برابر است .

۱۳۳۸. عبارتهای زیر را بصورت لگاریتمی بنویسید :

$$\sin \alpha \pm \sin \beta ; 1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha ; 3 - 4 \cos^2 \alpha$$

۱۳۳۹. راه‌حلهای اساسی معادلات مثلثاتی را ذکر کنید .

۱۳۴۰. مفهوم توابع معکوس مثلثاتی را بیان کنید . مقادیر مهم آنها را نام ببرید .

۱۳۴۱. بازاء چه مقادیری از x تساوی زیر صحیح است ؟

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

۱۳۴۲. رابطه زیر بازاء چه مقادیری از x صحیح است ؟

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

۱۳۴۳. صحت تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

۱۳۴۴. ثابت کنید :

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

۱۳۴۵. محاسبه کنید :

$$\log \operatorname{tg} 1^\circ, \log \operatorname{tg} 2^\circ, \log \operatorname{tg} 3^\circ, \dots, \log \operatorname{tg} 59^\circ, \log \operatorname{tg} 60^\circ$$

۱۳۴۶. نامعادله $\sin \frac{1}{x} > 0$ را حل کنید .

۱۳۴۷. کوچکترین ریشه مثبت معادله $\operatorname{tg} x = x$ را بطور تقریبی پیدا کنید .

§ ۲۳. نمونه‌هایی از کارهای مکاتبه‌ای

نمونه ۱

۱۳۴۸. دو اتومبیل در یک زمان و از یک نقطه در یک جهت براه افتادند. سرعت اتومبیل اول a کیلومتر در ساعت و سرعت اتومبیل دوم b کیلومتر در ساعت

است . پس از نیم ساعت از همان نقطه اتومبیل سوم برآه افتاد ، پس از آنکه به دومی رسید یکساعت و نیم دیگر بجلو رفت تا به اولی رسید . اگر حرکت هرسه اتومبیل یکنواخت باشد ، سرعت اتومبیل سوم را پیدا کنید .
۱۳۴۹ . x و y را محاسبه کنید :

$$C_x^{y-1} : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}) : C_x^{y+1} = 3:5:5$$

۱۳۵۰ . پای ارتفاعات مثلثی را بهم وصل کرده ایم . اگر اضلاع مثلث اصلی بترتیب a ، b و c باشد محیط مثلثی که بدست می‌آید پیدا کنید (مثلث را حاده الزاویه بگیرید) .

۱۳۵۱ . یکی از زوایای مسطحه رأس یک چهار وجهی مساوی α و زوایای دو وجهی مجاور همین وجه بترتیب مساوی β و γ است . دوزاویه مسطحه دیگر را پیدا کنید .

۱۳۵۲ . معادله زیر را حل و درباره ریشه‌های آن بحث کنید :

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$$

نمونه ۲

۱۳۵۳ . ساعتی که تندکاری کند m دقیقه کمتر از وقت حقیقی را نشان میدهد . اگر این ساعت n دقیقه کمتر از وقت حقیقی را نشان می‌داد و اگر در هر شبانه‌روز t دقیقه جلوکاری کرد ، در یک شبانه‌روز قبل ساعت حقیقی را نشان می‌داد . این ساعت در هر شبانه‌روز چند دقیقه جلو کاری کند .
۱۳۵۴ . مطلوبست مقدار x از عبارت :

$$\left[\frac{1}{(\sqrt{x})^{1+\log x}} + \sqrt[12]{x} \right]^6$$

بشرطی که جمله چهارم بسط آن مساوی ۲۰۰ باشد .
۱۳۵۵ . معادله زیر را حل کنید و درباره جوابهای آن بحث کنید :

$$\sin 3x + \sin 2x - n \sin x = 0$$

۱۳۵۶ . دودایره به شعاعهای R و r مماس خارج اند . مطلوبست شعاع دایره‌ای

که برای این دودایره و مماس خارج آنها مماس باشد .

۱۳۵۷. در یک هرم منتظم مربع القاعده‌ای هر یک از زوایای دوجوهی بین وجوه

جانبی برابر با $\frac{\pi}{4} > \beta$ است، مطلوبست زوایای مسطحه رأس این هرم .

نمونه ۳

۱۳۵۸. ثابت کنید :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{x}} \right) \cdot (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 2) \times \\ \times \sqrt{5/2} = 1$$

۱۳۵۹. ۱۲۰۰ ریال به صندوق پس انداز سپرده ایم . پس از یک سال ۲۴۰ ریال

آنرا پس گرفته ایم و سپس بعد از یک سال دیگر ۱۰۷۱ ریال در صندوق پس انداز

موجودی داریم . نرخ بهره را محاسبه کنید .

۱۳۶۰. معادله زیر را حل کنید :

$$\frac{x^2 + x - 88}{21} = \log_{44} 1$$

۱۳۶۱. در روابط زیر x را حذف کنید :

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = m \\ \sin^3 x + \cos^3 x = k \end{cases}$$

۱۳۶۲. ثابت کنید که فاصله بین اوساط اقطار هر ذوزنقه برابر است با نصف

تفاضل دو قاعده .

نمونه ۴

۱۳۶۳. اگر $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$ و $a > 0$ و $b > 0$ باشد، حاصل

عبارت زیر را بدست آورید :

$$\frac{2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

۱۳۶۴. لامپی بفاصله ۴ متر از يك شمع قرار گرفته است . درچه نقطه‌ای روی خط راستی که از این دومنبع نور می‌گذرد ، نور شمع و لامپ یکنواخت خواهد بود ؟ بشرطی که نور لامپ ۹ برابر نور شمع است و شدت نور متناسب با عکس مجذور فاصله تغییر می‌کند .

۱۳۶۵. معادله زیر را حل کنید :

$$1 + \log x = \frac{1}{3} \log \left[\frac{b - (3a - b)(a^2 + ab)^{-1}}{b - 2} \right] - \frac{2}{4}b + \frac{1}{3} \log (a^3 - b^3)$$

۱۳۶۶. معادله زیر را حل کنید :

$$1 - \sin 12x = 2 \sin^2 17x$$

۱۳۶۷. درلوزی که زاویه آن ۵۰ درجه است دایره‌ای بشعاع R محاط کرده‌ایم . مطلوبست مساحت لوزی .

نمونه ۵

۱۳۶۸. يك هنگ سرباز بشکل مثلث متساوی‌الاضلاعی ایستاده‌اند : در ردیف اول یکنفر ، در ردیف دوم دونفر و غیره . اگر تعداد سربازهای هنگ ۶۶۹ نفر بیشتر بود ، می‌توانستند بشکل مربع بایستند که در آن حال در هر ضلع مربع ۸ نفر کمتر از نفرات ضلع مثلث قرار می‌گرفتند. تعداد سربازهای هنگ را معین کنید .

۱۳۶۹. معادله زیر را حل کنید :

$$\log_x 2 + \log_{2x} 2 + \log_{4x} 2 = 0$$

۱۳۷۰. عبارت زیر را ساده کنید :

$$\frac{a^4 + a^2 - a - 1}{(1 - a^2 b)^2 + (a^2 + b)^2} \times \frac{\left[2 + \frac{b}{a}(a^2 - 1)\right]^2 + \left[2b - \frac{1}{a}(a^2 - 1)\right]^2}{a^2 - a^{-2}}$$

۱۳۷۱. معادله زیر را حل کنید :

$$\sin x - \sin(180^\circ + 3x) = \sin 2x + \sin 4x$$

۱۳۷۲. روی قاعده يك مخروط نیمکره‌ای ساخته‌ایم . مولد مخروط با صفحه قاعده آن، زاویه‌ای مساوی α می‌سازد. قطر دایره‌ای که از تقاطع نیمکره با سطح جانبی مخروط بدست می‌آید برابر است با a . مطلوبست حجم مخروط و سطح جانبی مخروط ناقصی که بدست می‌آید .

نمونه ۶

۱۳۷۳. لوکوموتیوی باید فاصله ۲۴۰ کیلو متر را در زمان معینی طی کند . پس از سه ساعت راه ۳۰ دقیقه بیشتر درایستگاه توقف کرد و برای اینکه بموقع به مقصد برسد بقیه راه را با سرعتی که $3\frac{1}{3}$ کیلو متر در ساعت بیش از سرعت قبلی‌اش بود ، طی کرد . اگر ۳۰ دقیقه توقف اضافی را نداشت ، لوکوموتیو ساعتی چند کیلو متر می‌توانست طی کند ؟

۱۳۷۴. معادله زیر را حل کنید :

$$3^{12x-1} - 9^{6x-1} - 27^{4x-1} + 81^{2x+1} = 2192$$

۱۳۷۵. ثابت کنید :

$$\sqrt[3]{1 - \frac{a^2}{b^2}} + \frac{a^2}{b^2} \sqrt[3]{a^{-2}b^2 - b^6a^{-6}} + (a^2 - b^2) \sqrt[3]{\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2}} = (a + b) \sqrt[3]{a^2 - b^2}$$

۱۳۷۶. صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید :

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta + \gamma) \sin \beta - \gamma + \sin(\gamma + \alpha) \sin(\gamma - \alpha) = 0$$

۱۳۷۷. در قطعه‌کروی به شعاع R مخروطی محاط کرده‌ایم که در ارتفاع و قاعده باهم مشترک‌کند. اگر بزرگترین زاویه بین مولدهای مخروط مساوی 2α باشد، نسبت حجم مخروط را به حجم قطعه‌کروی پیدا کنید.

نمونه ۷

۱۳۷۸. عبارت زیر را ساده کنید :

$$\frac{a \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2b\sqrt{a}} \right)^{-1} + b \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2a\sqrt{b}} \right)^{-1}}{\left(\frac{a + \sqrt{ab}}{2ab} \right)^{-1} + \left(\frac{b + \sqrt{ab}}{2ab} \right)^{-1}}$$

۱۳۷۹. معادله زیر را حل کنید :

$$\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = a-b$$

نمونه ۸

۱۳۸۰. عبارت زیر را ساده کنید :

$$\left| \frac{(a + \sqrt{ax}) : (x + \sqrt{ax}) - 1}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right|^6$$

۱۳۸۱. با شرط $x \geq 1$ معادله زیر را حل کنید :

$$5\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} = \frac{3\sqrt{10x}}{\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}}$$

نمونه ۹

۱۳۸۲. معادله زیر را حل کنید :

$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 4 \sin x$$

۱۳۸۳. رأس یک مخروط مرکز کره‌ای است که سطح آن بر صفحه قاعده مخروط مماس است. زاویه رأس مخروط را روی صفحه‌ای که از محور آن عبور می‌کند

پیدا کنید ، بشرطی که میدانیم سطح کره حجم مخروط را به دو قسمت هم ارز تقسیم می‌کند .

نمونه ۱۰

۱۳۸۴. طول پاره خطی را پیدا کنید که بموازات دو قاعده يك ذوزنقه رسم شده و آنرا به دو شکل هم ارز تقسیم می‌کند . طول قاعده‌های ذوزنقه بترتیب مساوی a و b می‌باشد .

۱۳۸۵. معادله زیر را حل کنید :

$$\frac{(\cos x + \sin x)^2 - \sin^2 x}{\cos^4 x + \frac{1}{4} \sin^2 2x} = 2$$

نمونه ۱۱

۱۳۸۶. دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^2 y + x y^2 = \frac{5}{3} (x - y) \\ xy = x^2 y^2 \end{cases}$$

۱۳۸۷. معادله زیر را حل کنید :

$$\log 2 + \log(2^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$$

۱۳۸۸. در بسط دو جمله‌ای $(\sqrt[4]{x} - \sqrt{x^{-5}})^n$ ، تفاضل ضرایب جملات سوم و دوم برابر ۷۷ شده است . جمله مستقل از x را پیدا کنید .

نمونه ۱۲

۱۳۸۹. دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 65 \\ xy(x + y) = 30 \end{cases}$$

۱۳۹۰. در تصاعد حسابی به جملات $a_1, a_2, \dots, a_{31}$ میدانیم :

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{31} = 784$$

مطلوبست محاسبه مجموع :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{r-1}$$

۱۳۹۱. معادله زیر را حل کنید :

$$-\log_7 \log_8 \log_7 x = 1 - \log_7 2$$

نمونه ۱۳

۱۳۹۲. حوضی به دو لوله مربوط است که از اولی آب وارد و از دومی خارج می‌شود. وقتی که هر دو لوله باز بودند حوض در ۶ ساعت پر شد. اگر لوله اول برای پر کردن حوض یک ساعت بیشتر وقت لازم داشت و همچنین لوله دوم هم برای خالی کردن آن یک ساعت بیشتر وقت می‌گرفت، آنوقت با باز بودن هر دو لوله، حوض در ۱۲ ساعت پر می‌شد. در چند ساعت لوله اول حوض را پر و دوم آنرا خالی می‌کند ؟

۱۳۹۳. در مثلث متساوی الساقینی دایره‌ای بشمار R محاط کرده‌ایم. مطلوبست محیط مثلث، بشرطی که زاویه بین دو ضلع مساوی مثلث برابر α باشد.

۱۳۹۴. عبارت زیر را ساده کنید :

$$\left[(x-y) \cdot \frac{x - \frac{x'y - y^2}{x+y+xy}}{x+y - \frac{xy}{x+y}} - \frac{x' - y^2}{(x+y)^2 + x'y + xy^2} \right] : \frac{x^2 + x'y - x' - xy^2 - y^2 + y^2}{x + xy + y}$$

۱۳۹۵. معادله زیر را حل کنید :

$$\sin\left(\Delta x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x - \pi).$$

نمونه ۱۴

۱۳۹۶. عبارت زیر را ساده کنید :

$$\sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-a^2}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-a^2}} \right)$$

۱۳۹۷. معادله زیر را حل کنید :

$$\frac{\frac{3}{2}\log 3 + \log(x+1)}{\log(5x-1) + \log(x+2) + \log 6} = \frac{1}{2}$$

۱۳۹۸. میدانیم $\sin \alpha = 5/8$ و $\cos \beta = -5/13$ و α و β زوایای منفرجه‌اند،

مطلوبست محاسبه $\cos(2\alpha - \beta)$.

۱۳۹۹. مساحت مثلث متساوی‌الساقینی برابر Q و زاویه بین دوساق آن مساوی α است. این مثلث را دور خطی که از يك رأس مجاور قاعده بر آن عمود شده است، دوران داده‌ایم. سطح جسمی که بدست می‌آید محاسبه کنید.

نمونه ۱۵

۱۴۰۰. صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید :

$$a^{\frac{1}{2}} - \frac{a - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1 - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{a^{\frac{2}{2}}} = 0$$

۱۴۰۱. شعاع قاعده مخروطی مساوی R و زاویه رأس آن روی صفحه محوری مساوی α است. مطلوبست حجم هرم مثلث القاعده منتظمی که بر این مخروط محیط شده باشد.

۱۴۰۲. دستگاه زیر را حل کنید :

$$x^{\log y} = 100 ; xy = 1000$$

۱۴۰۳. معادله زیر را حل کنید :

$$\cot g(x + 3\pi) = tg(x + \pi) + \sec \frac{13\pi}{6}$$

نمونه ۱۶

۱۴۰۴. مطلوبست سطح جانبی مخروطی که بر يك هرم منتظم مثلث القاعده محیط شده باشد، بشرطی که زاویه مسطحه رأس هرم مساوی α و شعاع دایره محاطی دروجه جانبی آن مساوی r باشد.

۱۴۰۵. دو نوع آلباز داریم که یکی شامل ۵٪ و دیگری ۴۰٪ نیکل است.

از هر کدام چند تن برداریم تا رویهم ۱۴۰ تن آلیاژ با ۳۰٪ نیکل داشته باشیم ؟

۱۴۰۶. معادله زیر را حل کنید :

$$\sqrt{2} \cos^2 x = \cos x + \sin x$$

۱۴۰۷. دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1100 \\ x + y + z = 54 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

نمونه ۱۷

۱۴۰۸. در ظرفی a لیتر $p\%$ از محلول اسیدازتیک وجود دارد. چند لیتر از محلول $q\%$ همین اسید در ظرف بریزیم تا اگر با اضافه کردن آب حجم کل را تا b لیتر برسانیم محلول $n\%$ اسید بدست آید.

۱۴۰۹. در مخروطی کره‌ای محاط کرده‌ایم که قطر آن ارتفاع مخروط باشد. مطلوبست حجم قسمتی از کره که داخل مخروط است، بشرطی که ارتفاع مخروط مساوی H و زاویه رأس مخروط روی مقطع محوری آن مساوی 2α باشد.

۱۴۱۰. معادله زیر را حل کنید :

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

۱۴۱۱. دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x \sqrt{x} - \sqrt{y} = y^4 \\ y \sqrt{x} - \sqrt{y} = x \end{cases}$$

نمونه ۱۸

۱۴۱۲. فاصله از A تا B از دوراه مختلف بترتیب ۷۷ کیلومتر و ۹۷/۵ کیلومتر است. اتومبیلی که راه طولانی را طی می‌کند در هر ساعت ۵ کیلومتر بیشتر از اتومبیلی می‌رود که راه کوتاه‌تر را انتخاب کرده است. اگر اتومبیل

اول ۴ دقیقه زودتر از اتوبوس دوم بمقصد برسد ، سرعت هر يك از آنها را پیدا کنید .

۱۴۱۳. مستطیلی را دور محوری دوران داده‌ایم . این محور از راس مستطیل عبور کرده و بر قطر آن عمود و در همان صفحه مستطیل واقع است . زاویه بین اقطار مستطیل برابر α و طول مستطیل برابر a است . حجم جسمی که در نتیجه دوران بدست می‌آید پیدا کنید .

۱۴۱۴. دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \log(2y-x) = 1 \\ \frac{x-y}{2} - 2 \frac{x-y}{4} = 2 \end{cases}$$

۱۴۱۵. معادله زیر را حل کنید :

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 4 \sin x$$

نمونه ۱۹

۱۴۱۶. در يك مخروط ، هر می محاط کرده‌ایم که قاعده آن يك مثلث قائم الزاویه است و وجه جانبی که از يك ضلع مجاور به زاویه قائمه عبور کرده است با صفحه قاعده زاویه‌ای مساوی α می‌سازد .

اگر مولد مخروط بطول ۱ و با صفحه قاعده زاویه‌ای مساوی β ساخته باشد ، حجم هرم را بدست آورید .

۱۴۱۷. ثابت کنید که تفاضل بین واسطه عددی و واسطه هندسی دو عدد مثبت a و b کوچکتر است از خارج قسمت تقسیم مجذور تفاضل دو عدد مفروض بر دو برابر عدد کوچکتر .

۱۴۱۸. محاسبه کنید :

$$\begin{aligned} & 3/5 + 1/5 \left(2/652 : \sqrt{1/69} - 1\frac{17}{30} + \frac{3}{50} \right) \times \\ & \times \left[19/21 - \left(\sqrt{18/1476} - \frac{5}{24} : \frac{5}{42} \right) \right] \end{aligned}$$

نمونه ۲۰

۱۴۱۹. قاعده يك هرم مستطیلی است که اقطار آن با هم زاویه‌ای مساوی α می‌سازند و ضمناً زاویه بین وجوه جانبی هرم با صفحه قاعده برابر است با φ . حجم هرم را پیدا کنید بشرطی که بدانیم شعاع کره محیطی آن برابر است با R .

۱۴۲۰. درصد متوسط سالیانه رشد جمعیت شهری از سالی به سال دیگر مقداری است ثابت. اگر درصد سالیانه رشد جمعیت باندازه k زیاد شود، پس از n سال جمعیت شهر دو برابر جمعیت در شرایط عادی می‌شود. درصد رشد سالیانه جمعیت شهر را پیدا کنید.

۱۴۲۱. محاسبه کنید:

$$\frac{1}{20} - \frac{(0,645 : 0,3 - 1 \frac{107}{180}) \cdot (4 : 6,25 - 1 : 5 + \frac{1}{7} \sqrt{3,8416})}{1 - 2 \frac{1}{5} : 7}$$

نمونه ۲۱

۱۴۲۲. یالهای جانبی و دو ضلع قاعده از هرم مثلث القاعده‌ای باهم برابر و هر یک از آنها مساوی b است. زاویه بین دو ضلع مساوی قاعده برابر α است. حجم هرم را محاسبه کنید.

۱۴۲۳. ساده کنید:

$$\left[\frac{4x^2 + ax \log_2 4}{\sqrt{4a^2x^2 - 8ax^2}} - \frac{16^{\frac{2}{4}} x^{\frac{2}{2}}}{\sqrt{2a(2ax - 4x^2)}} \right] : \sqrt{\frac{1}{2ax} - a^{-2}}$$

۱۴۲۴. ثابت کنید:

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$$

نمونه ۲۲

۱۴۲۵. منشور قائم مربع القاعده‌ای مفروض است. از قطر قاعده و یکی از رؤوس قاعده بالا صفحه‌ای گذرانده‌ایم، سطح کل هرمی که باین ترتیب از منشور جدا می‌شود برابر است با S . اگر زاویه رأس مثلث مقطع مساوی α باشد، سطح کل منشور را بدست آورید.

۱۴۲۶. بفرض اینکه $a = \left(\frac{p-5}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$ باشد، عبارت زیر را ساده کنید:

$$\frac{\frac{1}{2} - a^{-1}}{2 - a^2} : \left(\frac{2}{2+a} - \frac{2}{a} - 1\right)$$

۱۴۲۷. ثابت کنید:

$$\sin \alpha \left(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

نمونه ۲۲

۱۴۲۸. مطلوب است سطح کل و حجم هرم مربع القاعده منظمی که یال جانبی آن مساوی قطر مستطیلی به محیط $2p = 2m$ و مساحت $S = 3m^2$ و شعاع دایره محیطی قاعده هرم $r = \frac{2\sqrt{6}m}{5}$ باشد (جواب را بتقریب بدست آورید).

۱۴۲۹. عبارت زیر را ساده کنید:

$$\left(a + b^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

۱۴۳۰. معادله زیر را حل کنید:

$$3\sqrt[3]{x^2} = 9 \times 3\sqrt[3]{x}$$

۱۴۳۱. صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$\cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$$

نمونه ۲۳

۱۴۳۲. قطار پست در ساعت ۵ صبح از ایستگاه B که در فاصله ۱۰۸۰ کیلو متری آن قرار داشت، برای افتاد. در ساعت ۸ صبح قطار سریع السیری که در هر ساعت ۱۵ کیلومتر بیش از قطار پست میرفت، از ایستگاه B بطرف ایستگاه A برای افتاد. دو قطار درست وسط راه AB بهم رسیدند. ساعت ملاقات آنها را پیدا کنید.

۱۴۳۳. معادله زیر را حل کنید :

$$\frac{1}{\log_x 8} + \frac{1}{\log_{2x} 8} + \frac{1}{\log_{4x} 8} = 2$$

۱۴۳۴. معادله زیر را حل کنید :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 0.25$$

۱۴۳۵. ضلع قاعده هرم منتظم مربع القاعده‌ای مساوی a و زاویه دو وجهی مجاور قاعده آن مساوی β است. از مرکز کره محاطی این هرم، صفحه‌ای به موازات قاعده رسم کرده‌ایم. مطلوبست سطح مقطع.

نمونه ۳۵

۱۴۳۶. معادله زیر را حل کنید :

$$3 \times 4^x + \frac{1}{3} \times 9^{x+2} = 6 \times 4^{x+1} - \frac{1}{4} \times 9^{x+1}$$

۱۴۳۷. درچه فاصله‌ای از مرکز دایره، نقطه‌ای انتخاب کنیم که طول مماس مرسوم از آن نقطه بر دایره برابر نصف فاصله این نقطه از محیط دایره (روی خطی که از مرکز می‌گذرد) باشد.

۱۴۳۸. معادله زیر را حل کنید :

$$\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$$

نمونه ۳۶

۱۴۳۹. دستگاه دو معادله دومجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} 2x^2 + 2xy + y^2 = 139 \\ 4x^2 - 2xy + y^2 = 79 \end{cases}$$

۱۴۴۰ در کره‌ای به شعاع R هرم مربع القاعده منتظمی محاط کرده‌ایم که تمام یالهای آن باهم برابر است. حجم و سطح کل هرم را پیدا کنید.

۱۴۴۱. معادله زیر را حل کنید :

$$\sin^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$$

نمونه ۲۷

۱۴۴۲. دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \frac{3}{2x+y} - \frac{1}{3y-z} + \frac{2}{5x-z} = 1 \\ \frac{6}{2x+y} + \frac{1}{3y-z} + \frac{6}{5x-z} = 4 \\ \frac{15}{2x+y} - \frac{2}{3y-z} + \frac{20}{5x-z} = 9 \end{cases}$$

۱۴۴۳. محیط نیمدایره‌ای را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. اگر این نیمدایره را دور قطرش دوران دهیم، ثابت کنید سطح شکلی که از دوران قوس وسط بدست می‌آید برابر با مجموع سطوح اشکالی است که از دوران قوسهای مجاور به قطر بدست می‌آید.

۱۴۴۴. معادله زیر را حل کنید :

$$12 \sin^2 x + 3 \sin 2x - 2 \cos^2 x = 2$$

نمونه ۲۸

۱۴۴۵. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه نیمساز زاویه قائمه ضمناً نیمساز زاویه بین میانه و ارتفاع همین رأس هم هست.

۱۴۴۶. نامعادله زیر را حل کنید (بافرض $a > 1$) :

$$2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2 x} a > 0$$

۱۴۴۷. ثابت کنید که برای مقادیر $x \neq k \frac{\pi}{p}$ (k عددی است صحیح)، نامساوی

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{cotg}^4 x \geq 2$$

زیر برقرار است :

۱۴۴۸. قاعده یک‌هرم، مثلث متساوی‌الساقینی است که هر ساق آن مساوی b و قاعده آن مساوی a است. زاویه دوجهی بین وجوه جانبی و قاعده هر مساوی α است. حجم هرم را بدست آورید.

§ ۲۴. نمونه‌هایی از اوراق امتحانی

نمونه ۱

۱۴۴۹. نسبت‌های مستقیم و معکوس را شرح دهید.

۱۴۵۰. قضیه مربوط به خاصیت نیمساز زاویه داخلی مثلث را ثابت کنید .

۱۴۵۱. طرف دوم روابط زیر را بدست آورید :

$$\arcsin x + \arccos x = ?$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = ?$$

نمونه ۲

۱۴۵۲. بشرط اینکه m و n کسرهای گویائی باشند ، رابطه زیر را نتیجه بگیرید :

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

۱۴۵۳. حجم قطاع کروی را بدست آورید .

۱۴۵۴. مساحت مثلثی را پیدا کنید که :

(a) دوزلع و زاویه بین آنها معلوم باشد .

(b) دوزاویه و ضلع بین آنها معلوم باشد .

نمونه ۳

۱۴۵۵. راه حل نامعادله درجه دوم يك مجهولی

۱۴۵۶. رابطه مساحت مثلث بر حسب سه ضلع آن .

۱۴۵۷. تبدیل توابع مثلثاتی با آوند دلخواه به توابع مثلثاتی زوایای حاده .

نمونه ۴

۱۴۵۸. قضایای مربوط به روابط متري در مثلث قائم الزاویه را ثابت کنید .

۱۴۵۹. لکارتیم اعشاری ، مفسرومانتیس را شرح دهید .

۱۴۶۰. به صورت ضرب تبدیل کنید :

$$2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$$

۱۴۶۱. معادله زیر را حل کنید :

$$5 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 x = 9$$

نمونه ۵

۱۴۶۲. قضیه مربوط به قطر عمودبروتر و عکس آن .

۱۴۶۳. قضیه فیثاغورث (اثبات جبری) .

۱۴۶۴. قضایای مربوط به رابطه بین زوایای دو وجهی و زوایای مسطحه و عکس آنها .

۱۴۶۵. رابطه مربوط به سینوس مجموع دو قوس را ثابت کنید .

۱۴۶۶. معادله زیر را حل کنید :

$$2 \sin^2 x = 3 \sin x$$

نمونه ۶

۱۴۶۷. عبارت جبری . جمله . کثیرالجمله . ضریب .

۱۴۶۸. رابطه دوجمله‌ای نیوتون و خواص آن .

۱۴۶۹. عبارت زیر را ساده کنید :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x} \right) : \left(\sqrt{1-x^2} + 1 \right)^{-2}$$

۱۴۷۰. مطلوبست مجموع n عدد از رشته اعداد طبیعی .

۱۴۷۱. ثابت کنید :

$$\frac{1}{\log_5 3} = 5$$

نمونه ۷

۱۴۷۲. رابطه بین ریشه‌های معادله درجه دوم و ضرایب آن.

۱۴۷۳. چند ضلعی‌های متشابه .

۱۴۷۴. حجم هرم ناقص .

۱۴۷۵. اثبات رابطه مربوط به تانژانت مجموع دو قوس .

نمونه ۸

۱۴۷۶. خاصیت عمودی که از رأس زاویه قائمه پروتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای

رسم شود .

۱۴۷۷. سطح کره و قطعه کره .

۱۴۷۸. منحنی نمایش تابع $y = \sin x$. اثبات متناوب بودن سینوس .

نمونه ۹

۱۴۷۹. ریشه تقریبی با تقریب $\frac{1}{10^n}$. اعمال با اعداد تقریبی.

۱۴۸۰. منحنی تابع نمایی، روشهای حل معادلات نمایی و معادلات لگاریتمی.

۱۴۸۱. از معادله زیر x و y را بدست آورید:

$$(3i-8)x + (2i-5)y = i$$

بشرطی که x و y اعدادی حقیقی باشند.

نمونه ۱۰

۱۴۸۲. میدانیم که اعداد a ، b و c در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c};$$

ثابت کنید که در این صورت دو تا از این اعداد قرینه یکدیگرند.

۱۴۸۳. معادله زیر را حل کنید:

$$2\cos^2 x + \sin^2 x = 3\sin x \cos x$$

۱۴۸۴. ثابت کنید که هر میانه مثلث از نصف مجموع دوز ضلع مجاورش کوچکتر

و از تفاضل این نصف مجموع و ضلع سوم مثلث بزرگتر است.

نمونه ۱۱

۱۴۸۵. ساده کنید:

$$\frac{2^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x} \times 0.4 \sqrt{\frac{4}{1-x}} \times 2 \sqrt{4-8x+4x^2} \times \frac{1}{4}}{\sqrt{4-4x}}$$

۱۴۸۶. در یک دوزنقه متساوی الساقین قاعده بزرگتر مساوی ۴۴ متر، طول

هر ساق مساوی ۱۷ متر و قطر آن مساوی ۳۹ متر است. مساحت این دوزنقه

را بدست آورید.

۱۴۸۷. رابطه دو جمله‌ای نیوتون را ثابت کنید.

نمونه ۱۲

۱۴۸۸. محاسبه کنید:

$$\frac{(1+i)^3}{(2-3i)^2} \left(\frac{3-i}{2+i} - \frac{2-i}{3+i} \right)$$

۱۴۸۹. در مثلثی طول قاعده مساوی ۱۲ سانتیمتر، یکی از زوایای مجاور قاعده مساوی ۱۲۰ درجه و ضلع روبروی باین زاویه مساوی ۲۸ سانتیمتر است. ضلع سوم را محاسبه کنید.

۱۴۹۰. اندازه گیری زاویه را با درجه و رادیان شرح دهید.

نمونه ۱۳

۱۴۹۱. مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$$

۱۴۹۲. اگر بدانیم: $tg\varphi + cotg\varphi = a$ مطلوبست محاسبه $sin\varphi$.

۱۴۹۳. مخروط ناقصی با ارتفاع h مفروض است. مولد این مخروط باصفحه قاعده پائین زاویه α می‌سازد و ضمناً برخطی که انتهای بالای این مولد را به انتهای مقابل آن وصل می‌کند، عمود است. سطح جانبی مخروط ناقص را بدست آورید.

نمونه ۱۴

۱۴۹۴. اگر a ، p و q مقادیر حقیقی باشند، ثابت کنید معادله زیر همواره جوابهای حقیقی دارد:

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} = \frac{1}{a^2}$$

۱۴۹۵. معادله زیر را حل کنید:

$$tg x = 2 \cos \frac{x}{2}$$

۱۴۹۶. ثابت کنید که زاویه يك مثلث حاده، قائمه و یا منفرجه است وقتی که ضلع روبروی به آن کوچکتر، مساوی و یا بزرگتر از دو برابر میانه‌وارد

به آن ضلع باشد :

نمونه ۱۵

۱۴۹۷. کره . مقطع کره با صفحه . سطح مماس بر کره .

۱۴۹۸. عدد موهومی . عدد مختلط . اعداد مختلط بصورت جبری و انجام

چهار عمل اصلی روی آنها . شرط تساوی دو عدد مختلط .

۱۴۹۹. تغییرات تابع $y = \cos x$ و منحنی نمایش آن .

۱۵۰۰. نقطه‌ای در خارج دایره و به فاصله قطر از مرکز دایره قرارداد .

مطلوبست زاویه بین مماسهایی که از این نقطه بردایره رسم می‌شود .

نمونه ۱۶

۱۵۰۱. پاره خط x را با شرایط زیر رسم کنید :

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} ; x = \frac{ab}{c} ; x = \frac{a^2}{c} ; x = \sqrt{ab}$$

۱۵۰۲. نامعادلات هم‌ارز. قضیه مربوط به نامساویهای هم‌ارز وقتی که دو طرف

یک نامساوی را در عددی ضرب کنیم .

۱۵۰۳. حل مثلث وقتی که سه ضلع آن a ، b و c معلوم باشد .

۱۵۰۴. محاسبه کنید :

$$3 \sin 15^\circ \cos 15^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}$$

نمونه ۱۷

۱۵۰۵. قضیه مربوط به قابلیت تقسیم یک کثیرالجمله بر $x - a$ ، نتایج این قضیه ،

۱۵۰۶. مطلوبست جمله‌ای از بسط دوجمله‌ای :

$$\left(z\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^m$$

که پس از ساده کردن شامل z^5 است ، بشرطی که مجموع ضرایب دوجمله‌ای

پس از بسط آن مساوی ۱۲۸ باشد .

۱۵۰۷. معادله زیر را حل کنید :

$$\operatorname{tg}^2 x - \cotg^2 x = 0$$

نمونه ۱۸

۱۵۰۹. اتحاد و معادله. قضایای مربوط به هم‌ارز بودن معادلات.
۱۵۱۰. عبارت زیر را ساده کنید:

$$\frac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1} \cdot P_{2x-n}}$$

۱۵۱۱. معادله زیر را حل کنید:

$$\sin x + \cos x = \cos 2x$$

مسائل المپیادهای ریاضی

(لنینگراد)

§ ۲۵. مسائلی برای کلاسهای هشتم ☆

نمونه ۱

۱۵۱۲. دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ ax = by = cz \end{cases}$$

۱۵۱۳. از نقطه تلاقی دودایره ، خطی رسم کنید که در دودایره دو وتر مساوی بوجود آورد .

نمونه ۲

۱۵۱۴، دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + \frac{y+z}{2} = 19 \\ x + \frac{z+x}{2} = 19 \\ z + \frac{x+y}{2} = 19 \end{cases}$$

(*) در اتحاد شوروی برای دوره ابتدائی ۵ سال و برای دوره متوسطه هم ۵ سال در نظر گرفته شده است و باین ترتیب کلاس هشتم بمعنی سال سوم متوسطه است (مترجم)

۱۵۱۵. مثلثی رسم کنید که دوزلع و تفاضل زوایای مجاور به قاعده آن معلوم باشد.

نمونه ۳

۱۵۱۶. به صورت ضرب تبدیل کنید :

$$x^4 + 6x^3y + 8x^2y^2 - 6xy^3 - 9y^4$$

۱۵۱۷. مثلث متساوی الساقینی رسم کنید که ارتفاع وارد بر قاعده و میانه وارد بر ساق آن معلوم باشد.

نمونه ۴

۱۵۱۸. سه زمین شناس دواسب دارند. فاصله تا اردو ۱۳/۵ کیلومتر است. کدام زودتر به اردو میرسند بشرطی که سرعت پیاده ۴ کیلو متر در ساعت و سرعت اسب ۶ کیلومتر در ساعت باشد (روی يك اسب دو نفر نمی توانند سوار شوند و اسب راهم بدون راهنمایی توان گذاشت).

۱۵۱۹. از مثلثی پاره خطهایی که ارتفاع روی قاعده جدای می کند و میانه وارد بر یکی از دو ضلع دیگر معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱۵۲۰. ثابت کنید که بازا همه مقادیر صحیح m عدد زیر برابر با عددی صحیح است :

$$\frac{m^4}{24} + \frac{m^3}{4} + \frac{11m^2}{24} + \frac{m}{4}$$

نمونه ۵

۱۵۲۱. دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 9 \end{cases}$$

۱۵۲۲. از نقطه ای واقع در داخل دایره و تری رسم کنید که طول آن حداقل باشد.

۱۵۲۳. ثابت کنید که همه اعدادی که بصورت زیر باشند، مکعب کاملاند:

$$۱۳۳۱; ۱۰۳۰۳۰۱; ۱۰۰۳۰۰۳۰۰۱; ۱۰۰۰۳۰۰۰۳۰۰۰۱; \dots$$

نمونه ۶

۱۵۲۴. مسافرت از شهر گورکی تا اشترخان از روی رود ولگا ۷۲ ساعت و از اشترخان تا گورکی ۹۶ ساعت طول می کشد. کشتی همین راه را روی آپراکد در چند ساعت طی می کند؟

۱۵۲۵. از لوزی مجموع دو قطر و اندازه زاویه حاده آن معلوم است لوزی را رسم کنید.

۱۵۲۶. اگر $a > b > 0$ و $a^2 + b^2 = 6ab$ باشد، ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}$$

نمونه ۷

۱۵۲۷. در متوازی الاضلاع ABCD از رأس C عمود CE را بر امتداد ضلع AB فرود آورده ایم. نقطه E را به نقطه M وسط ضلع AD وصل کرده ایم. ثابت کنید.

$$\widehat{BEM} = \widehat{EMC}$$

۱۵۲۷. مطلوبست محاسبه k و l بشرطی که ریشه های معادله زیر باشند:

$$x^2 + kx + l = 0$$

۱۲۵۹. عدد 9^9 به چه رقمی ختم شده است؟

نمونه ۸

۱۵۳۰. نقاط A و B در یکطرف دو خط موازی q و h مفروض اند. نقطه M را بر یکی از دو خط موازی چنان انتخاب کنید که خطوط AM و BM دوباره خط مساوی بین خطوط موازی بوجود آورند.

۱۵۳۱. مقدار a را در معادله درجه دوم:

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$$

چنان پیدا کنید که یکی از ریشه‌های آن مساوی مجذور ریشه دیگر باشد .
 ۱۵۳۳. عدد $۷۷۷^{۷۷۷}$ به چه رقمی ختم شده است ؟

نمونه ۹

۱۵۳۳. دو خط موازی و نقطه‌ای واقع در بین آنها مفروض است . مثلث متساوی الساقینی رسم کنید که رأس آن بر نقطه مفروض و دورأس طرفین قاعده‌اش بر دو خط موازی منطبق باشد و ضمناً قاعده‌اش با خط مفروض d موازی شود .
 ۱۵۳۴. a را چنان پیدا کنید که دو معادله زیر دارای يك ریشه مشترك باشند:

$$\begin{cases} x^2 + x + a = 0 \\ x^2 + ax + 1 = 0 \end{cases}$$

۱۵۳۵. ثابت کنید که يك عدد مجذور كامل يا بر ۹ قابل قسمت است و يا در تقسیم بر ۳ باقیمانده‌ای مساوی ۱ دارد .

نمونه ۱۰

۱۵۳۶. در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، رأس C را به اواسط اضلاع AB و AD وصل کرده‌ایم . ثابت کنید که در این صورت قطر BD به سه قسمت مساوی تقسیم می‌شود .

۱۵۳۷. ثابت کنید $n^3 + 3n^2 - n - 3$ بازاء همه مقادیر صحیح n بر ۴۸ قابل قسمت است .

§ ۴۶. مسائلی برای کلاسهای نهم

نمونه ۱۱

۱۵۳۸. دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 - 3xy \\ x + y = 3 - xy \end{cases}$$

۱۵۳۹. در يك چهارضلعی محدب لوزی محاط کرده‌ایم که اضلاع آن موازی

اقطار چهار ضلعی باشد. اگر اقطار چهار ضلعی مساوی l و m باشند، طول ضلع لوزی را پیدا کنید.

نمونه ۱۲

۱۵۴۰. مجموع n جمله یک تصاعد حسابی برابر است با $n^2 + 5n$. مطلوبست دهمین جمله این تصاعد.

۱۵۴۱. نقطه O را در داخل متوازی الاضلاع $ABCD$ در نظر گرفته ایم. ثابت کنید مجموع مساحت‌های مثلث‌های AOB و COD برابر است با مجموع مساحت‌های مثلث‌های BOC و AOD .

نمونه ۱۳

۱۵۴۲. ثابت کنید مکان هندسی مراکز دواير محاط در مثلث قائم الزاویه ای که

وتر آن پاره خط ثابتی بطول c است، قوسی است از یک دایره بشعاع $\frac{c}{\sqrt{2}}$.

۱۵۴۳. دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 10 \times 2^{x-y} \\ (x^2 + y^2)(x^2 + y^2) = x^5 + y^5 \end{cases}$$

نمونه ۱۴

۱۵۴۴. $ABCD$ یک متوازی الاضلاع است، خطی موازی AB رسم کرده ایم تا BC را در نقطه K ، AC را در نقطه L و AD را در نقطه M قطع کند. ثابت کنید مثلث‌های ABK و ALD هم‌ارزند.

۱۵۴۵. میدانیم که $\sin B = \frac{1}{5} \sin(2A + B)$ ، ثابت کنید.

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{3}{2} \operatorname{tg} A$$

نمونه ۱۵

۱۵۴۶. مثلث ABC مفروض است. نقاط D و E را به ترتیب بر اضلاع AB و BC چنان انتخاب کنید که داشته باشیم $BD = DE = EC$.

۱۵۴۷. معادله زیر را حل کنید:

$$(1+x+x^2)(b-x-x^2)=a$$

نمونه ۱۶

۱۵۴۸. مطلوبست مکان هندسی نقاط تماس دودایره‌ای که بر يك خط مفروض در دو نقطه مفروض مماس باشند .

۱۵۴۹. معادله زیر را حل کنید :

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$$

۱۵۵۰. ثابت کنید که بازاء هر مقدار صحیح m ، عدد :

$$\frac{3m-5}{12} \cdot m(m-1)(m-2)$$

عددی است صحیح .

نمونه ۱۷

۱۵۵۱. مثلثی را رسم کنید که محل تلاقی میانه‌های آن و اوساط دوضلعش معلوم باشد .

۱۵۵۲. مجموع زیر را محاسبه کنید :

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

نمونه ۱۸

۱۵۵۳. مثلثی را رسم کنید که يك ضلع و يك میانه و زاویه‌ای که این میانه از رأس آن می‌گذرد معلوم باشد .

۱۵۵۴. عقربه‌های ساعت باهم زاویه‌ای مساوی α ساخته‌اند . اولین باری که

دو عقربه زاویه‌ای مساوی $\frac{\alpha}{3}$ می‌سازند پس از چه مدت است ؟

نمونه ۱۹

۱۵۵۵. ثابت کنید که اگر محل تلاقی ارتفاعات، هرسه ارتفاع را بیک نسبت تقسیم کند ، مثلث متساوی‌الاضلاع است .

۱۵۵۶. اگر $a+b+c < 0$ باشد ، ثابت کنید دستگاه زیر ریشه حقیقی ندارد :

$$\begin{cases} x^2 - yz = a \\ y^2 - xz = b \\ z^2 - xy = c \end{cases}$$

نمونه ۲۰

۱۵۵۷. مثلث ABC مفروض است: $CA=b$, $BC=a$, $AB=c$. نقطه O را داخل مثلث در نظرمی گیریم. اگر x , y و z فواصل نقطه O از سه رأس A , B و C و همچنین p , q و r فواصل نقطه O از اضلاع AB و AC , BC باشد، ثابت کنید:

$$ax \geq bq + rc$$

نمونه ۲۱

۱۵۵۸. نقطه A داخل یک زاویه داده شده است. مثلث متساوی الساقینی بسازید که رأس آن بر A و دور رأس مجاور قاعده اش بر اضلاع زاویه منطبق باشد.

۱۵۵۹. $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ به تصاعد حسابی هستند، مجموع زیر را بدست آورید:

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}$$

§ ۲۷. مسائلی برای کلاسهای دهم و یازدهم.

نمونه ۲۲

۱۵۶۰. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n = (n+2)2^{n-1}$$

۱۵۶۱. رئوس یک چندوجهی P اوساطیالهای یک چهاروجهی منتظم به حجم v است. مطلوبست حجم چند وجهی P .

۱۵۶۲. معادله زیر را حل کنید:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x = 0$$

نمونه ۲۳

۱۵۶۳. معادله زیر را حل کنید :

$$4^{2x+1} + 2^{2x+6} = 4 \times 8^{x+1}$$

۱۵۶۴. ضلع قاعده يك هرم منتظم مثلث القاعده‌ای برابر a و یال جانبی آن برابر ۱ است. ثابت کنید میتوان صفحه‌ای موازی دو یال متقاطع هرم رسم کرد که بعنوان مقطع يك مربع بدست آید. طول ضلع این مربع را بدست آورید.

۱۵۶۵. معادله زیر را حل کنید :

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$$

نمونه ۲۴

۱۵۶۶. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} + \frac{1}{5!(n-5)!} + \dots = \frac{2^{n-1}}{n!}$$

۱۵۶۷. ثابت کنید چهار خطی که رئوس يك چهاروجهی منتظم را به محل تلاقی مباحنه‌های وجه روبرو وصل می‌کنند متقارب‌اند و یکدیگر را بر نسبت ۱:۳ قطع می‌کنند.

۱۵۶۸. معادله زیر را حل کنید :

$$32 \cos^6 x - \cos 6x = 1$$

نمونه ۲۵

۱۵۸۹. دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} yx^2 - yx + 12 = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

۱۵۷۰. قاعده يك هرم مستطیلی است به ابعاد ۶ دسی‌متر و ۸ دسی‌متر. یالهای جانبی این هرم بایکدیگر برابر و ارتفاع هرم مساوی ۲ دسی‌متر است. مطلوبست سطح مقطعی که از قطر قاعده بموازات یال جانبی رسم شده باشد.

۱۵۷۱. میدانیم :

$$\begin{cases} \cos \theta + \cos \varphi = a \\ \sin \theta + \sin \varphi = b \end{cases}$$

مطلوبست محاسبه $\cos(\theta + \varphi)$.

نمونه ۳۶

۱۵۷۲. در یک چهار وجهی منتظم وسط ارتفاع را به رئوس وصل کرده ایم . ثابت کنید خطهایی که بدین طریق بدست می آید دودو برهم عمودند .

۱۵۷۳. جوابهای حقیقی دستگاه معادلات زیر را بدست آورید :

$$\begin{cases} (x+y)^5 = x^5 + y^5 \\ x^2 + x^2y + 3x^2 + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

۱۵۷۴. رشته اعداد زیر را بترتیب صعودی منظم کنید :

$$\sin 1; \sin 3; \sin 5; \sin 7; \sin 9;$$

نمونه ۳۷

۱۵۷۵. در یک کنج سه وجهی دو زاویه دوجوهری مساوی ۴۵ درجه و زاویه مسطحه بین یالهای این دو زاویه مساوی ۹۰ درجه است . ثابت کنید زاویه دوجوهری سوم مساوی ۱۲۰ درجه است .

۱۵۷۶. نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$ax + by + cz \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

a , b , c و x , y , z اعدادی حقیقی هستند .

نمونه ۳۸

۱۵۷۷. در یک هرم منتظم مسدس القاعده ، زاویه مسطحه وجه جانبی در رأس هرم مساوی α است . مطلوبست زاویه دوجوهری که بین دو وجه مجاور جانبی واقع است .

۱۵۷۸. اگر a , b و c اعدادی مثبت باشند ثابت کنید :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

۱۵۷۹. رشته اعداد زیر را بطور صعودی منظم کنید :

$$\cos 2^\circ ; \cos 4^\circ ; \cos 6^\circ ; \cos 8^\circ ; \cos 10^\circ$$

نمونه ۲۹

۱۵۸۰. شخصی که در ساحل مستقیم رودخانه راه میرفت، دکل بلند کشتی را دید. مسیر دید او بطرف دکل بامسیر ساحل رودخانه زاویه 40° درجه می ساخت و رأس دکل با صفحه افق به زاویه 30° درجه بود. وقتی که 420 قدم در ساحل پیشرفت درست در مقابل دکل قرار گرفت. ارتفاع دکل را پیدا کنید بشرطی که هر قدم بطور متوسط 70 سانتیمتر باشد (جواب را بر حسب متر و بتقریب بدهید).

۱۵۸۱. a ، b و c اعدادی مختلف اند و در روابط زیر صدق می کنند:

$$\begin{cases} a^3 + pa + q = 0 \\ b^3 + pb + q = 0 \\ c^3 + pc + q = 0 \end{cases}$$

ثابت کنید: $a + b + c = 0$

۱۵۸۲. ثابت کنید که تساوی زیر بازاء هیچ مقداری از A صحیح نیست:

$$\sin A + \cos A = \operatorname{tg} A + \operatorname{cotg} A$$

نمونه ۳۰

۱۵۸۳. یالهای جانبی هرمی را از طرف رأس آن ادامه داده و بوسیله صفحه ای موازی قاعده هرم قطع کرده ایم. مطلوبست مجموع حجمهای هر دو هرم بشرطی که میدانیم مساحت دو قاعده S_1 و S_2 و فاصله بین دو قاعده مساوی h است.

۱۵۸۴. ۱۲ گلوله داریم: ۳ گلوله سفید، ۴ گلوله قرمز و ۵ گلوله خاکستری، آنها را ازنجیر وار پشت سرهم چیده ایم، به چند طریق ممکن است این عمل را انجام داد؟

۱۵۸۵. اگر $-1 \leq a \leq 1$ و $-1 \leq b \leq 1$ باشد، ثابت کنید:

$$ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1$$

نمونه ۳۱

۱۵۸۶. ثابت کنید که اگر از سه رأس یک چهار وجهی منتظم به وسط ارتفاعی که از رأس چهارم می گذرد وصل کنیم پاره خطهایی دوبدو عمود برهم بدست می آید.

۱۵۸۷. اگر $a \geq b \geq 0$ باشد ثابت کنید :

$$a^4 + b^4 \geq 2ab^2$$

۱۵۸۸. مجموع تمام اعداد ۵ رقمی را پیدا کنید که در هریک از آنها ارقام ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ فقط یکبار استفاده شده باشد.

نمونه ۳۲

۱۵۸۹. قاعده یک هرم، مربعی است بضلع ۵ واحد. دو یال جانبی مقابل هم هریک ۴ واحد و یکی از دو یال جانبی دیگر ۲ واحد است. طول یال جانبی چهارم را پیدا کنید.

۱۵۹۰. ثابت کنید که بازاء هر مقدار دلخواه a ، b و c نامساوی زیر صحیح است :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3^2 \geq 2(a + b + c + 3)$$

۱۵۹۱. اگر $\log_a N = m$ و $\log_a N = n$ باشد، مطلوبست $\log_{ab} N$

نمونه ۳۳

۱۵۹۲. روی دووجه فرجهای که زاویه دوجهی آن مساوی ۴۵ درجه است، دو نقطه A و B را انتخاب کرده ایم. فواصل AA' و BB' این دو نقطه از یال فرجه یکی و برابر b است. مطلوبست طول $A'B'$ روی یال فرجه بشرطی که فاصله مستقیم دو نقطه A و B در فضا مساوی a باشد.

۱۵۹۳. اگر $a > b > 0$ و $a^2 + b^2 = 6ab$ باشد، ثابت کنید :

$$\log(a+b) - \log(a-b) = \frac{1}{4} \log 2$$

۱۵۹۴. ثابت کنید که عدد $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ بازاء مقادیر زوج n بر ۵۱۲ قابل قسمت است.

نمونه ۳۴

۱۵۹۵. دایره ای باشعاع مفروض رسم کنید که مرکزش بر دایره مفروض دیگری باشد و از نقطه مفروضی به زاویه ای معین دیده شود.

۱۵۹۶. اگر داشته باشیم: $a_1^2 + b_1^2 = 1$ و $a_4^2 + b_4^2 = 1$ ، ثابت کنید :

$$-1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq 1$$

نمونه ۳۵

۱۵۹۷. بردایره ای دومماس موازی رسم کرده ایم A و D را نقاط تماس فرض کنید) سپس مماس سومی بر دایره رسم می کنیم تا دومماس اول را بترتیب در B و C قطع کند. اگر شعاع دایره مساوی r باشد حاصلضرب AB ، CD را محاسبه کنید.

۱۵۹۸. ثابت کنید که اگر بازاء مقادیر $x \geq 0$ و $y \leq \frac{\pi}{4}$ داشته باشیم:

$$\cos(x-y)\cos 2y = \cos(x+y)$$

خواهیم داشت: $x=y$

نمونه ۳۶

۱۵۹۹. دایره ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض بگذرد و خط مفروضی را در وتری بطول مفروض قطع کند،
۱۶۰۰. اگر A ، B و C زوایای مثلث باشند، در چه مثلثی رابطه زیر برقرار است:

$$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) = 1$$

نمونه ۳۷

۱۶۰۱. ثابت کنید که از بین اعداد:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

نمی توان اعدادی را انتخاب کرد که به تصاعد هندسی نزولی باشند و حد مجموع آنها مساوی $\frac{1}{5}$ شود.

نمونه ۳۸

۱۶۰۲. يك كنج سه وجهی و نقطه A واقع بر یکی از یالهای آن مفروض است. دو نقطه B و C را بر یالهای دیگر كنج چنان انتخاب کنید که محیط مثلث ABC می نیمم باشد.

۱۶۰۳. ثابت کنید که اگر $n \geq 3$ باشد، مجموع n عدد متوالی نمی تواند مساوی بایک عدد اول باشد.

نمونه ۳۹

۱۶۰۴. سه خط موازی در فضا داده شده است. مطلوبست مکان محل تلاقی میانه های مثلثهایی که رئوس آنها بر این سه خط واقع اند.

۱۶۰۵. معادله زیر را حل کنید:

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$$

نمونه ۴۰

۱۶۰۶. سه خط موازی در فضا داده شده است. صفحه ای چنان رسم کنید که از تلاقی آن با سه خط مفروض مثلثی با سطح می نیمم بدست آید.

۱۶۰۷. صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha$$

§ ۲۸. برای کلاسهای هشتم تا یازدهم.

نمونه ۴۱

۱۶۰۸. چهار دایره مفروض است بنحوی که هر یک از آنها بر دو دایره دیگر مماس خارج باشد. ثابت کنید که نقاط تماس بر محیط یک دایره واقع است.

۱۶۰۹. ثابت کنید که اگر هر یک از دو عدد a و b بصورت $x^2 - 5y^2$ باشند، عدد ab هم بصورت $x^2 - 5y^2$ خواهد بود.

۱۶۱۰. معادله زیر را حل کنید:

$$x(x+a)(x+2a)(x+3a) = a$$

۱۶۱۱. در نیمدایره مفروض، مثلثی محاط کنید که سطح آن ماکزیمم باشد.

۱۶۱۲. سه دایره با شعاعهای مساوی در یک نقطه یکدیگر را قطع کرده اند. ثابت کنید دایره ای که از سه نقطه تلاقی دیگر عبور می کند دارای همان شعاع سه دایره مفروض است.

۱۶۱۳. روابط زیر مفروض است :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 ; m^2 + n^2 + p^2 = 1$$

ثابت کنید :

$$|am + bn + cp| \leq 1$$

۱۶۱۴. کثیرالجمله :

$$x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \dots + a_{n-1} x^2 + a_n$$

بر $x - 1$ قابل قسمت است . ثابت کنید که این کثیرالجمله بر $x^2 - 1$ قابل قسمت است

۱۶۱۵. شبکه‌ای از مربعهای بضلع واحد داریم . یکی از این مربعها را بدلتخواه انتخاب می‌کنیم . ثابت کنید که فاصله یکی از رئوس شبکه تا هر رأس این مربع عددی است گنگ .

۱۶۱۶. مجموع ده عدد برابر صفر است ، مجموع هر دو عدد دلخواه از آنها هم مساوی صفر است . ثابت کنید مجموع مربعات این ده عدد هم مساوی صفر است .

۱۶۱۷. داخل مثلث حاده الزاویه‌ای نقطه‌ای انتخاب کرده‌ایم که فاصله آن تا هر رأس مثلث از کوچکترین ضلع مثلث کمتر است . ثابت کنید که مجموع فواصل این نقطه تا سه رأس از سه چهارم محیط تجاوز نمی‌کند .

نمونه ۴۳

۱۶۱۸. در مربعی بضلع واحد چهار ضلعی محاط کرده‌ایم که هر رأس آن بر یک ضلع مربع واقع باشد . ثابت کنید یکی از اضلاع چهارضلعی بزرگتر یا مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است .

۱۶۱۹. ده عدد حقیقی داریم که مجموع آنها و مجموع حاصلضربهای دودوی آنها برابر صفر است . مطلوبست مجموع توانهای چهارم این ده عدد .
۱۶۲۰. مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}}$$

۱۶۲۱. معادله زیر را حل کنید :

$$(3x+2)^4 + (2x-4)^4 = (2x+3)^4 + (4x-2)^4$$

۱۶۲۲. يك زاویه و دوپاره خط برضلاع آن مفروض است . نقطه O را در داخل زاویه انتخاب کرده ایم و از وصل آن به انتهای پاره خطها مثلثهایی بدست می آید که مجموع مساحتهای آنها برابر است با S . مطلوبست مکان هندسی نقطه O .

۱۶۲۳. مجموع زیر را محاسبه کنید :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k k^2$$

نمونه ۴۴

۱۶۲۴. ثابت کنید که اگر کثیرالجمله :

$$a_0 x^{nk} + a_1 x^{(n-1)k} + \dots + a_{n-1} x^k + a_n$$

بر $x-1$ قابل قسمت باشد بر x^k-1 قابل قسمت است .

۱۶۲۵. مجموع زیر را محاسبه کنید :

$$C_n^1 \times 1^2 - C_n^2 \times 2^2 + C_n^3 \times 3^2 - \dots + (-1)^n C_n^n n^2$$

جواب و حل مسائل

۱. جبر.

§ ۱. مسائل مربوط به تشکیل معادلات ☆

۱. ۹ عدد یکرقمی داریم که مجموع ارقام آنها برابر است با ۹ ، ۹۰ ، عدد دورقمی داریم مجموعاً ۲×۹۰ رقم ، ۹۰۰ عدد سه رقمی داریم که مجموعاً ۳×۹۰۰ رقم می شود . تعداد عددهای چهار رقمی ۹۰۰۰ و مجموع ارقام آنها ۴×۹۰۰۰ می شود . بنابراین برای صفحه گذاری کتاب تمام اعداد يك رقمی ، دو رقمی ، سه رقمی و تعدادی از عددهای چهار رقمی بکار رفته است ، یعنی :

$$۱ \times ۹ + ۲ \times ۹۰ + ۳ \times ۹۰۰ + ۴x = ۶۸۶۹$$

از آنجا خواهیم داشت : $x = ۹۹۵$

جواب : ۱۹۹۴ صفحه .

۲. راه حل اول . تمام دروگرها نصف روز را در مزرعه بزرگتر کار کردند و در نصف دوم روز تنها نصف دروگرها آنرا درو کردند ، بنابراین در قسمت

دوم روز $\frac{۱}{۳}$ مزرعه بزرگتر درو شده است . اگر مساحت مزرعه بزرگتر را

واحد فرض کنیم ، مساحت مزرعه کوچکتر مساوی $\frac{۱}{۳}$ خواهد شد . باین ترتیب

از مزرعه دوم تنها $\frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲}$ باقی می ماند که درو نشده است و این همان

(*) در این فصل بعضی مسائل هم بطریق جبری و هم بطریق حساب حل شده اند و بهر حال می توانند وسیله ای برای تمرین مسائل حساب هم باشند .

مقدار کاری است که يك دروگر می تواند در تمام روز انجام دهد . در جریان روز اول دروگرها باندازه $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$ از دو مزرعه را درو کرده اند و

بنابراین تعداد دروگرها $8 = \frac{1}{6} : \frac{4}{3}$ خواهد شد .

راه حل دوم . تعداد دروگرها را x می گیریم ، بنابراین مثل اینست که روی مزرعه بزرگتر باندازه $x + \frac{x}{2}$ دروگر نصف روز کار کرده اند و روی مزرعه کوچکتر $2 + \frac{x}{2}$ نفر در نصف روز (یک نفر در تمام روز یا ۲ نفر در نصف روز) باین ترتیب باید معادله زیر را داشته باشیم :

$$x + \frac{x}{2} = 2\left(\frac{x}{2} + 2\right)$$

جواب : $x = 8$

۳. سن کنونی پسر را x فرض کنیم ، در این صورت باید داشته باشیم :

$$2x - 3(x - 6) = x \Rightarrow x = 9$$

جواب : ۹ سال

۴. سن شخص مساوی مجموع ارقام يك عدد چهار رقمی است که هیچيك از آنها بزرگتر از ۹ نیست ، بنابراین سن او از ۳۶ سال بزرگتر نیست . یعنی در قرن نوزدهم متولد شده است .

اگر x رقم دهگان و y رقم یکان سال تولدش باشد ، باید داشته باشیم :

$$1 + 8 + x + y = 87 - (10x + y)$$

$$11x + 2y = 78 \quad \text{یا :}$$

و این معادله تنها جوابهای $x = 6$ و $y = 6$ را قبول دارد .

جواب : ۲۱ سال

۵. تعداد صفهای واقع در سمت راست حاصلضرب $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100$ برابر است با تعداد عوامل ۱۰۰ در این حاصلضرب . ولی داریم : $10 = 5 \times 2$

بنابراین تعداد عوامل ۱۰ برابر است با تعداد حاصلضربهای ۲×۵ ، تمام اعداد زوجی که در $۱۰۰ \times \dots \times ۳ \times ۲ \times ۱$ وجود دارند بر ۲ قابل قسمت اند. ولی عوامل قابل قسمت بر ۵ آنها هستند که رقم سمت راستشان ۵ یا صفر باشد. یعنی رویهم ۲۰ عدد وجود دارد که بر ۵ قابل قسمت اند. علاوه بر آن ۴ عامل مضرب ۲۵ هم وجود دارد و باین ترتیب جمعاً ۲۴ جفت عامل ۲×۵ در این حاصلضرب پیدا می شود.

جواب: عدد به ۲۴ صفر ختم شده است.

۶. کسر مجهول را به $\frac{x}{y}$ نشان می دهیم، طبق شرط مسئله باید داشته باشیم:

$$\frac{x+6}{y+15} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{5}$$

جواب: $\frac{2}{5}$

۷. عدد مفروض شامل ۱۹۲ رقم است که باید ۱۰۰ رقم آنرا حذف کنیم. ۵ رقم اولیه ۹ از سمت چپ در عدد باقی می ماند (در اعداد ۹، ۱۹، ۲۹، ۳۹، ۴۹)، باین ترتیب باندازه:

$$۸ + ۴ \times ۱۹ = ۸۴$$

۸۴ رقم حذف می شود. رقم بعدی نمی تواند ۹ باشد، زیرا برای این منظور باید ۱۹ رقم حذف کنیم که رویهم $۱۹ + ۸۴ = ۱۰۳$ رقم می شود. بنابراین ۱۵ رقم حذف می کنیم، رقم ۷ از عدد ۵۷ میماند و از عدد ۵۸ هم رقم ۵ را حذف می کنیم، باین ترتیب $۱۰۰ = ۱ + ۱۵ + ۸۴$ رقم حذف می شود. عدد باقیمانده، عدد مورد نظر است.

جواب: ۹۹۹۹۹۷۸۵۹۶۰۶۱۶۲...۱۰۰

۸. دو عدد را x و y و تفاضل آنها را d می نامیم:

$$x - y = d : x = y + d$$

عدد اول را بر d تقسیم می کنیم (k را خارج قسمت و r را باقیمانده می گیریم):

$$x = kd + r ; \quad (۱)$$

بنابراین داریم:

$$y + d = kd + r$$

و از آنجا:

$$x = (k - ۱)d + r ; \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) روشن می‌شود که در تقسیم x و y بر تفاضل آنها ، باقیمانده‌ها برابر و خارج قسمت‌ها يك واحد اختلاف دارند .

۹. عدد اول را $8x$ و عدد دوم را $x^2 - 1$ می‌نامیم . حاصلضرب آنها چنین است :

$$8x(x^2 - 1) = 8x^3 - 8x$$

که اگر آنها را به عدد اول یعنی $8x$ اضافه کنیم $8x^3$ بدست می‌آید که مکعب $2x$ است . حالا این حاصلضرب را به عدد دوم یعنی $x^2 - 1$ اضافه می‌کنیم عبارت $8x^3 - 8x + x^2 - 1$ بدست می‌آید که باید مکعب کامل يك عدد باشد اگر این عدد را $2x - 1$ بنامیم داریم :

$$(2x - 1)^3 = 8x^3 - 8x + x^2 - 1$$

از آنجا $x = \frac{14}{13}$ می‌شود .

مجهولات این مسئله را طوری انتخاب کرده‌ایم که حل معادلات حاصل ساده باشد .

$$\text{جواب : } \frac{112}{13} \text{ و } \frac{27}{169}$$

۱۰. کوچکترین عددی که با ارقام واحد نوشته شود و مضرب ۳ باشد ۱۱۱ می‌باشد ، کوچکترین عدد مضرب ۳۳ عدد ۱۱۱۱۱۱ و ... و کوچکترین عدد مضرب ۳۳۳...۳ عدد $3n$ رقمی $\underbrace{111\dots 1}_{3n}$ می‌باشد که در آن n تعداد ارقام مقسوم علیه است .

۱۱. سه عدد مطلوب را $a+x$ و $b+x$ و $c+x$ فرض می‌کنیم . طبق فرض مسئله این سه عدد به تصاعد هندسی هستند :

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{b+x}{a+x}$$

$$x = \frac{b^2 - ac}{a + c - 2b}$$

و از آنجا :

مقدار x وقتی مثبت است که داشته باشیم :

$$b^2 - ac > 0 \text{ و } a + c > 2b \quad (۱)$$

$$b^2 - ac < 0 \text{ و } a + c < 2b \quad (۲) \quad \text{یا :}$$

از نامساویهای (۱) نتیجه می شود :

$$\frac{a+c}{2} > \sqrt{b} > \sqrt{ac} \quad (۳)$$

و از نامساویهای (۲) بدست می آید :

$$\frac{a+c}{2} < \sqrt{b} < \sqrt{ac} \quad (۴)$$

که غیر ممکن است (زیرا واسطه حسابی دو عدد مثبت از واسطه هندسی آنها کوچکتر نیست) .

بنابراین مسئله وقتی جواب دارد که نامساویهای (۳) برقرار باشد .

۱۲. سه عدد را a و b و c و مجموع آنها را $(1+x)^2$ فرض می کنیم :

$$a+b+c = (1+x)^2 = x^2 + 2x + 1$$

اگر مجموع دو عدد $a+b = x^2$ باشد ، عدد سوم $c = 2x + 1$ خواهد شد .

اگر مجموع دو عدد دوم و سوم $b+c = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ باشد

$a = 4x$ و بنابراین $b = x^2 - 4x$ می شود ، طبق شرط باید مجموع دو عدد

اول و سوم هم مجذور کامل باشد یعنی $a+c = 6x + 1$ باید مجذور کامل

باشد . اگر $6x + 1 = 121$ فرض کنیم $x = 20$ می شود .

$$\text{جواب : } a = 80 , b = 320 , c = 41$$

۱۴. راهنمایی : دو عدد را x و y فرض کنید ، در این صورت داریم :

$$\frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{1} = \frac{xy}{18}$$

جواب : ۹ و ۶ .

$$x^2 - y^2 = 133 \quad \text{۱۵. داریم :}$$

$$(x+y)(x-y) = 19 \times 7 = 133 \times 1$$

$$\begin{cases} x+y=19 \\ x-y=7 \end{cases} ; \begin{cases} x+y=133 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \text{و یا :}$$

باحل هریک از این دستگاهها جواب می آید .

جواب : ۱۳ و ۶ یا ۶۷ و ۶۶ .

۱۶. اگر رقم یکان عدد را x و رقم دهگان آنرا y فرض کنیم ، داریم :

$$\begin{cases} 10y+x=3(x+y) \\ (x+y)^2=9(10y+x) \end{cases}$$

جواب : ۲۷ *

۱۷. تناسب هندسی را می نویسیم :

$$t : x = y : z$$

طبق شرایط مسئله باید داشته باشیم :

$$t+z=2S$$

$$x+y=2S_1$$

$$t^2+x^2+y^2+z^2=4c^2$$

$$xy=tz$$

اگر فرض کنیم $xy=tz=q$ ، خواهیم داشت :

$$q=S^2+S_1^2-c^2$$

(*) در این مسئله یکی از شرایط اضافی است و مثلاً تنها با شرط دوم می توان عدد را بدست آورد :

$$(x+y)^2=3(10y+x) \Rightarrow (x+y)(x+y-3)=27y$$

از اینجا روشن است که باید $x+y$ مضربی از ۹ باشد . اگر فرض کنیم

$x+y=9k$ و در معادله قرار دهیم ، می شود :

$$k(3k-1)=y$$

و با توجه باینکه $1 \leq y \leq 9$ می باشد تنها با $k=1$ جواب دارد که $y=2$

«مترجم»

و سپس $x=7$ می شود .

و دیگر بسادگی جوابها بدست می آید :

$$t = S + \sqrt{c^2 - S_1^2}$$

$$z = S - \sqrt{c^2 - S_1^2}$$

$$x = S_1 + \sqrt{c^2 - S^2}$$

$$y = S_1 - \sqrt{c^2 - S^2}$$

۱۸. عددها را به $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ نشان می دهیم و ثابت می کنیم که بین آنها بیش از ۴ عدد مختلف نمی تواند وجود داشته باشد .

فرض می کنیم که بین این ۴ عدد بیش از ۴ عدد مختلف وجود داشته باشد و مثلاً :

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_k \quad (k = 5, 6, 7, \dots, n).$$

طبق شرط باید هر چهار عدد دلخواه از آنها که با هم مختلف باشند تشکیل تصاعد هندسی بدهند :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} \Rightarrow a_1 a_4 = a_2 a_3 \quad (1)$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_1 a_3 = a_2 a_4 \quad (2)$$

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_4}{a_2} \Rightarrow a_1 a_2 = a_3 a_4 \quad (3)$$

از سه تناسب بالا تنها اولی امکان دارد و تناسبهای دوم و سوم ممکن نیست، زیرا :

$$a_1 < a_2 \text{ و } a_3 < a_4$$

$$a_1 < a_3 \text{ و } a_2 < a_4$$

حالا تناسب زیر را تشکیل می دهیم :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_k}$$

و آنرا با (۱) مقایسه می کنیم ، بدست می آید :

$$a_4 = a_k$$

که مخالف با فرض است. یعنی هر يك از $4n$ عدد مساوی یکی از چهار مقدار ممکن و بنابراین هر n عدد آنها با هم برابر است.

۱۹. در هر شبانه روز عقربه ساعت شمار ۲ دور و عقربه دقیقه شمار ۲۴ دور می گردد. بنابراین عقربه دقیقه شمار ۲۲ مرتبه از عقربه ساعت شمار جلو می افتد و بازاء هر بار دومرتبه با آن زاویه قائمه می سازد.

جواب : ۴۴ مرتبه

۲۰. فرض می کنیم که عقربه های ساعت حرکتی یکنواخت داشته باشند. فرض می کنیم بعد از آنکه عقربه ساعت شمار با اندازه x واحد دقیقه ای جلو برود، عقربه دقیقه شمار به آن برسد، در این صورت عقربه دقیقه شمار با اندازه $45 + x$ واحد جلو رفته است. ولی چون عقربه دقیقه شمار ۱۲ مرتبه سریعتر از عقربه ساعت شمار حرکت می کند، داریم :

$$12x = 45 + x \Rightarrow x = 4\frac{1}{11}$$

جواب : بعد از $4\frac{1}{11}$ دقیقه

۲۱. در فاصله زمانی که سگ ۴ متر (۲ جست) پیش می رود، روباه فقط ۳ متر (۳ جست) جلو می رود و بنابراین از فاصله بین آنها ۱ متر کم می شود. فاصله اولیه بین سگ و روباه ۳۰ متر است، بنابراین سگ در فاصله ۱۲۰ متری نقطه A به روباه می رسد.

جواب : ۱۲۰ متر

۲۲. قیمت روی جلد کتابها را x ریال فرض می کنیم. کتابفروش $0.9x$ ریال آنرا پرداخته است، بنابراین درصد اضافه فروش او چنین است.

$$\frac{x - 0.9x}{0.9x} \times 100 = \frac{100}{9}$$

جواب : ۱۱/۱۱٪

۲۳. راهنمایی: اگر x را تعداد صفحاتی که در هر روز خوانده است بگیریم،

داریم :

$$\frac{۴۸۰}{x} = \frac{۴۸۰}{x+۱۶} + ۵$$

جواب : ۱۵ روز

۲۴. فاصله ده تا ایستگاه را x کیلومتر می گیریم . اگر دهقان این فاصله را

با سرعت ساعتی ۳ کیلو متر برود $\frac{x}{۳}$ ساعت در راه خواهد بود . راهی که بعد از

یکساعت برای دهقان مانده است $(x-۳)$ کیلومتر است که این راه را در

$\frac{x-۳}{۴}$ ساعت طی کرده است . اگر دهقان با سرعت اول خود می رفت ۴۰

دقیقه دیر می رسید ، یعنی قطار بعد از $\left(\frac{x}{۳} - \frac{۲}{۳}\right)$ ساعت به ایستگاه می رسد .

بعد از يك ساعت که دهقان در راه بود به آمدن قطار $\left(\frac{x}{۳} - \frac{۵}{۳}\right)$ ساعت

باقیمانده بود و چون بقیه راه را با سرعت جدید طی کرد ۴۵ دقیقه زودتر

رسید . بنابراین معادله زیر را داریم :

$$\frac{x}{۳} - \frac{۵}{۳} - \frac{x-۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

جواب : ۲۰ کیلومتر

۲۵. ریشه مثبت معادله مفروض مسئله مساوی ۵ می باشد . سرعت قایق را در

آب ساکن x کیلو متر در ساعت می گیریم . سرعت قایق در جهت جریان آب

$x + ۲/۴$ کیلومتر می شود و داریم :

$$\frac{۵}{x-۲/۴} + \frac{۵}{x+۲/۴} = \frac{۴۰۰۰}{۳۶۰۰}$$

و از آنجا $x_1 = ۹/۶$ بدست می آید (x_2 منفی است) .

جواب : $۹/۶$ کیلو متر در ساعت .

۲۶. راهنمایی : فرض می کنیم که هر دو لوله استخر را در x ساعت پرمیکنند،

در این صورت :

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+4/5} = \frac{1}{x} \Rightarrow x=3$$

جواب : لوله اول در ۵ ساعت و لوله دوم در ۷/۵ ساعت .

۲۷. سرعت قطار باری را x کیلومتر در ساعت فرض می‌کنیم ، سرعت قطار مسافری $(x+5)$ کیلومتر در ساعت خواهد شد . بعد از ۱۵ ساعت قطار مسافری $15(x+5)$ کیلومتر راه را طی می‌کند . قطار باری $16/5$ ساعت در راه بود و $16/5x$ کیلومتر طی کرده است .

بادر نظر گرفتن شرط مسئله معادله زیر را خواهیم داشت :

$$15(x+5) = 16/5x + 21 \Rightarrow x=36$$

جواب : ۳۶ کیلومتر در ساعت

۲۸. چون دو توریست P و M در یک زمان از A برآه افتادند و در یک زمان به نقطه B رسیده‌اند ، می‌توان نتیجه گرفت ، فاصله‌ای که توریست اول در ابتدای راه پیاده رفته است برابر است با فاصله‌ای که توریست دوم در انتهای راه پیاده رفته است . این فاصله را x می‌گیریم .

زمانی که توریست M برای طی x کیلومتر با سرعت v_1 کیلومتر در ساعت صرف کرده است ، برابر است با زمانی که موتور سیکلت N با سرعت v_2 کیلومتر در ساعت برای راهی مساوی $(28-x)$ کیلومتر لازم دارد $[(S-2x)$ کیلومتر تا ملاقات با توریست P و $(S-x)$ کیلومتر بعد از آن] . از آنجا :

$$\frac{x}{v_1} = \frac{28-x}{v_2} ;$$

$$x = \frac{28v_1}{v_2 + 2v_1} . \quad (1)$$

هریک از توریستها x کیلومتر پیاده و $(S-x)$ کیلومتر با موتور سیکلت رفته‌اند ، بنابراین زمانی که بطور کلی در راه بوده‌اند برابر است با :

$$t = \frac{x}{v_1} + \frac{S-x}{v_2} \quad (2)$$

با حذف x از روابط (۱) و (۲) مقدار t بدست می آید .

$$t = \frac{8(3v_r + v_1)}{v_r(3v_1 + v_r)} \quad \text{جواب :}$$

۲۹. فرض می کنیم که هر یک از دو کارگر بترتیب در x و y ساعت کار را تمام کنند ، دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{13}{6}xy \\ x + y = \frac{5}{18}xy \end{cases}$$

$$\text{جواب : } y_1 = 6, x_1 = 9 : y_2 = 9, x_2 = 6$$

۳۰. نسبت دو آلیاژ را در آلیاژ جدید $y : x$ می گیریم . بنابراین در آلیاژ

جدید از فلز اول $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y$ از فلز دوم $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y$ وجود خواهد داشت .

از آنجا :

$$\frac{\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y}{17} = \frac{\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y}{27}$$

و یا :

$$\frac{5x + 6y}{10x + 9y} = \frac{18}{27} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{9}{35}$$

یعنی در آلیاژ جدید ۹ قسمت از آلیاژ اول و ۳۵ قسمت از آلیاژ دوم خواهد بود .

جواب : ۳۵ : ۹

۳۱. x و $x - 2$ را بترتیب زمان کار موتور اول و دوم بر حسب ساعت فرض می کنیم . طبق شرط داریم :

$$\frac{600}{x} (x - 2) = \frac{384}{x - 2} x ;$$

$$9x^2 - 100x + 100 = 0 \Rightarrow x_1 = 10$$

یعنی :

$$\frac{600}{10} = 60 ; \frac{384}{8} = 48 \quad \text{بنابراین :}$$

جواب : ۶۰ گرم و ۴۸ گرم .

۳۲. فرض می‌کنیم در هر ضلع مربع x گلوله باشد ، بنابراین در هر ضلع مثلث $x+2$ گلوله خواهد بود .

بنابراین تعداد گلوله‌ها از یکطرف مساوی x^2 و از طرف دیگر مساوی :

$$1+2+3+\dots+(x+2) = \frac{(3+x)(x+2)}{2}$$

خواهد بود . از آنجا معادله زیر را داریم :

$$2x^2 = x^2 + 5x + 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

جواب : ۳۶ گلوله .

$$\begin{cases} x = \frac{s(t-2+\sqrt{t^2+4})}{2t} \\ y = \frac{s(t+2-\sqrt{t^2+4})}{2t} \end{cases} \quad \text{۳۳. جواب :}$$

۳۴. جواب : مسئله تنها وقتی جواب دارد که $v = 5 \text{ km/h}$ و $x = 4 \text{ km}$ باشد.

۳۵. سرعت دو اتوبوس را به ترتیب x و $x-2$ بگیرد ، معادله زیر را خواهید داشت :

$$\frac{36}{x} + \frac{1}{4} = \frac{36}{x-2}$$

جواب : ۱۸ کیلومتر در ساعت و ۱۶ کیلومتر در ساعت .

۳۶. اگر وزن آلیاژ اول را x و وزن آلیاژ دوم را y فرض کنیم ، داریم

$$\begin{cases} 0.950x + 0.800y + 2 = 25 \times 0.906 \\ x + y + 2 = 25 \end{cases}$$

جواب : ۱۵ کیلوگرم و ۸ کیلوگرم .

۳۷. فرض می‌کنیم آلیاژ x کیلوگرم نقره و y کیلوگرم مس داشته باشد.

اگر ۳ کیلوگرم نقره خالص بآن اضافه کنیم ، بدست می‌آید :

$$\frac{x+3}{x+y+3} = 0/900 \quad (1)$$

اگر ۲ کیلو گرم آلیاژ با عیار ۹۰۰ به آن اضافه کنیم ، نقره خالص کل مساوی $(2 \times 0/900 + x)$ خواهد شد و چون وزن کل مساوی $x+y+2$ است ، خواهیم داشت :

$$\frac{x+1/8}{x+y+2} = 0/840 \quad (2)$$

با حل دستگاه معادلات (۱) و (۲) ، $x = 2/4$ و $y = 0/6$ بدست می آید .
بنابراین وزن آلیاژ $x+y$ یعنی ۳ کیلو گرم و عیار آن $\frac{2/4}{3}$ یعنی ۰/۸ خواهد بود .

جواب : ۳ کیلو گرم ؛ ۰/۸

۳۷. مبلغ را x ریال و مدتی که در صندوق پس انداز بوده است t سال فرض می کنیم ، بنابراین بعد از t سال ، $0/02tx$ سود خواهد داشت .
سود همین مبلغ با نرخ ۳٪ و مدت $(t-1)$ سال $0/03(t-1)x$ می شود و از آنجا دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x + 0/02tx = 8502 \\ 0/03(t-1)x = 819 \end{cases}$$

اگر طرفین دو معادله را برهم تقسیم کنیم به معادله زیر میرسیم :

$$\frac{1 + 0/02t}{t-1} = \frac{1417}{4550}$$

از آنجا $t = 4/5$ یعنی ۴ سال و ۶ ماه می شود .

اگر مقدار t را در یکی از دو معادله قرار دهیم $x = 7800$ بدست می آید .
جواب : ۷۸۰۰ ریال ؛ ۴ سال و ۶ ماه .

۳۹. فرض می کنیم بنای دوم دیوار ، را در x روز تمام کند ، در این صورت بنای اول ، در $(x+3)$ روز آنرا تمام خواهد کرد . در نتیجه بنای اول در

یکروز $\frac{1}{x+3}$ دیوارو بنای دوم $\frac{1}{x}$ کار را انجام می دهند. بنای اول در $\frac{1}{3}$ روز به اندازه $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+3} \right)$ از کار را انجام داده است و بقیه کار را دوبنا به کمک هم در $\frac{1}{5}$ روز تمام کرده اند، این بقیه کار برابر است با $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x} \right)$ از آنجا معادله زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+3} \right) = 1$$

$$2x^2 - 19x - 33 = 0 \quad \text{یا :}$$

جواب : ۱۱ و ۱۴ روز .

۴۵. فرض کنیم نفر اول تمام راه را در x ساعت طی کرده باشد، در این صورت دومی برای تمام راه $(x + \frac{2}{5})$ ساعت در راه بوده است. اولی در یک ساعت $\frac{1}{x + \frac{2}{5}}$ قسمت راه و دومی $\frac{1}{x}$ قسمت از راه را می رود. و می دانیم وقتی که پس از سه ساعت راه پیمائی بهم رسیده اند یعنی رو به هم تمام راه را رفته اند :

$$3 \left(\frac{1}{x + \frac{2}{5}} + \frac{1}{x} \right) = 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0$$

با حل این معادله $x_1 = 5$ بدست می آید ($x_2 < 0$ است) * .

جواب : $\frac{7}{5}$ ساعت و ۵ ساعت .

۴۱. راهنمایی : باید معادله زیر را حل کرده :

$$t \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+k} \right) = 1$$

که در آن x عبارتست از زمان لازم برای پیاده دوم .

۴۲. فرض می کنیم برای هر رأس از احشام x تن علوفه در نظر گرفته باشند، بعد از کسر b رأس مقدار سرانه علونه $(x+c)$ می شود. در حالت اول تعداد

(*) از اینجا به بعد ریشه های غیر قابل قبول معادلات را داخل پرانتز خواهیم گذاشت .

احشام $\frac{a}{x}$ و در حالت دوم $\frac{a}{x+c}$ است و بنابراین داریم :

$$\frac{a}{x} - \frac{a}{x+c} = b$$

$$bx^2 + bcx - ac = 0 \quad \text{یا :}$$

$$(x_1 < 0) \quad x_1 = \frac{-bc + \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2b} \quad \text{جواب :}$$

۴۳. راهنمایی :

$$\frac{a}{x-b} - \frac{a}{x} = 0$$

که در آن x عبارتست از تعداد کارگرهایی که مشغول تخلیه غله بوده اند.

$$(x_1 < 0) \quad x_1 = \frac{bc + \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2c} \quad \text{جواب :}$$

۴۴. فرض می کنیم قطار سریع السیر فاصله s کیلومتر را در x ساعت طی کند، در این صورت قطار مسافری همین فاصله را در $x+t$ ساعت طی خواهد کرد. اختلاف سرعت دو قطار مساوی a است ، از آنجا معادله زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{s}{x} - \frac{s}{x+t} = a ;$$

$$ax^2 + atx - st = 0 \quad \text{و یا :}$$

$$(x_1 < 0) \quad x_1 = \frac{-at + \sqrt{a^2t^2 + 4ast}}{2a} \quad \text{جواب :}$$

۴۵. سرعت قطار را v کیلومتر در ساعت فرض می کنیم ، بنابراین سرعت اضافه شده آن $(v+a)$ کیلومتر در ساعت می شود . با سرعت اول، فاصله b

کیلومتر را در $\frac{b}{v}$ ساعت و با سرعت دوم همین فاصله را در $\frac{b}{v+a}$ ساعت طی

می کند . بنابراین معادله زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{b}{v} - \frac{b}{v+a} = \frac{t}{60}$$

$$(v_r < 0) \quad v_1 = \frac{-at + \sqrt{a^2 t^2 + 240abt}}{2t} \quad \text{جواب :}$$

۴۶. سرعت اتومبیل را در جاده آسفالتی x کیلومتر در ساعت می گیریم، در این صورت سرعت اتومبیل در جاده خاکی $(x+v)$ کیلومتر در ساعت خواهد شد. مدتی

که برای عبور از جاده خاکی لازم است مساوی $\frac{2}{3} \times \frac{s}{x+v}$ ساعت و مدتی

که برای عبور از جاده آسفالتی لازم است مساوی $\frac{1}{3} \times \frac{s}{x}$ ساعت است و بنابراین

داریم :

$$\frac{2s}{3(x+v)} + \frac{s}{3x} = t$$

با حل این معادله بدست می آید :

$$x_1 = \frac{3(s-vt) + \sqrt{9(s^2 + v^2 t^2) - 6svt}}{6t} \quad (x_r < 0) ;$$

$$x_1 + v = \frac{3(s+vt) + \sqrt{9(s^2 + v^2 t^2) - 6svt}}{6t}$$

۴۷. سرعت فرمانده را x کیلومتر در ساعت می گیریم. سرعت نسبی فرمانده وقتی که در جهت حرکت ستون پیش می رود مساوی $(x-v)$ کیلومتر در ساعت و وقتی که در خلاف جهت حرکت ستون می رود مساوی $(x+v)$ کیلومتر در ساعت است. بنابراین باید داشته باشیم :

$$\frac{d}{x-v} + \frac{d}{x+v} = \frac{t}{60} ;$$

$$tx^2 - 120dx - tv^2 = 0 \quad \text{و یا :}$$

$$(x_r < 0) \quad x_1 = \frac{60d + \sqrt{3600d^2 + t^2 v^2}}{t} \quad \text{جواب :}$$

۴۸. جواب : ۵۰ کیلومتر در ساعت .

$$۴۹. \text{ جواب : } (x_1 < 0) x_1 = \frac{d - bt + \sqrt{(d + bt)^2 + 4abt}}{2t}$$

و سرعت موتور سیکلت سوار b کیلومتر بیشتر از x_1 .

۵۰. سرمایه اول را $1000x$ و سرمایه دوم را $1000y$ فرض می کنیم، در این صورت :

$$1000x + 1000y = 10000$$

$$x + y = 10 \quad (۱) \quad \text{و یا :}$$

نرخ سرمایه اول $x = \frac{1000x}{1000}$ و بنابراین سود سرمایه اول در یکسال مساوی

$$1000x \times \frac{x}{100} = 10x^2$$

مساوی $10y^2$ خواهد شد . بنابراین طبق شرط مسئله خواهیم داشت :

$$10x^2 + 10y^2 = 580$$

$$x^2 + y^2 = 58 \quad (۲) \quad \text{و یا :}$$

واز حل دستگاه معادلات (۱) و (۲) جواب بدست می آید .

جواب : ۷۰۰۰ ریال و ۳۰۰۰ ریال .

۵۱. اگر وزن محلول اول را x کیلوگرم بگیریم، وزن محلول دوم مساوی

$(10 - x)$ کیلوگرم خواهد شد و طبق شرط مسئله داریم :

$$\frac{0.18 \times 100}{x} - \frac{0.16 \times 100}{10 - x} = 10 ;$$

از آنجا $x_1 = 4$ بدست می آید $(x_2 = 20)$.

جواب : ۴ کیلوگرم و ۶ کیلوگرم .

۵۲. اگر تولیدکارخانه را در سال واحد فرض کنیم ، در سال اول باندازه

$1 + \frac{a}{100}$ تولید کرده است . تولیدکارخانه در سال دوم چنین خواهد بود :

$$1 + \frac{a}{100} + \left(1 + \frac{a}{100}\right) \frac{b}{100} = \left(1 + \frac{a}{100}\right) \left(1 + \frac{b}{100}\right)$$

اگر اضافه تولید را در سال سوم $x\%$ فرض کنیم ، این اضافه تولید چنین خواهد بود :

$$\left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right)\frac{x}{100} ;$$

چون می‌خواهیم اضافه تولید متوسط سه سال $c\%$ باشد ، خواهیم داشت :

$$\frac{1}{3}\left[\frac{a}{100} + \left(1 + \frac{a}{100}\right)\frac{b}{100} + \left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right)\frac{x}{100}\right] = \frac{c}{100}$$

$$\% \frac{3c - a - b - \frac{ab}{100}}{\left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right)} : \text{ جواب}$$

۵۳. دفعه اول توپ تا ارتفاع $\frac{2}{3} \times 8/1$ بالا می‌آید

دفعه دوم توپ تا ارتفاع $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 8/1$ بالا می‌آید.

.....

دفعه n ام توپ تا ارتفاع $\left(\frac{2}{3}\right)^n \times 8/1$ بالا می‌آید

و بنابراین باید داشته باشیم :

$$8/1 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1/6 ;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \quad \text{یا}$$

جواب : $n = 4$

۵۴. جمعیت شهر را N فرض می‌کنیم . در آخر سال اول جمعیت شهر چنین می‌شود :

$$N + \frac{N}{80} = N\left(1 + \frac{1}{80}\right) ;$$

و در آخر سال دوم :

$$N\left(1+\frac{1}{80}\right)\left(1+\frac{1}{80}\right)=N\left(1+\frac{1}{80}\right)^2;$$

و بالاخره در آخر سال n ام جمعیت شهر می شود :

$$N\left(1+\frac{1}{80}\right)^n$$

و بنابراین باید داشته باشیم :

$$N\left(1+\frac{1}{80}\right)^n=2N$$

جواب : $n = \frac{\log 2}{\log 81 - \log 80}$ یا تقریباً ۵۶ سال .

۵۵. جواب : ۴۹ و ۱

۵۶. تعداد صندوقهای هر ردیف را x و تعداد ردیفها را y فرض می کنیم .
طبق شرط مسئله دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} xy = n \\ (x+p)(y-m) = n \end{cases}$$

با حل این دستگاه دودسته جواب بدست می آید :

$$۱) x_1 > 0 ; y_1 > 0 ; \quad ۲) x_2 < 0 ; y_2 < 0$$

جوابهای دسته دوم منفی و بنابراین قابل قبول نیستند .

۵۷. سرعت تراموا را x کیلومتر در ساعت می گیریم . سرعت پیاده ۵ کیلومتر در ساعت است . سرعت نسبی تراموایی که از روبرو می آید $(x+5)$ کیلومتر در ساعت و سرعت نسبی تواموایی که در جهت حرکت پیاده می رود $(x-5)$ کیلومتر در ساعت است .

تعداد ترامواهایی که از دو طرف در یک زمان معین می آیند با سرعت آنها متناسب است ، یعنی :

$$\frac{x+5}{x-5} = \frac{120}{45}$$

از آنجا سرعت مجهول تراموا بدست می آید .

جواب : ۱۱ کیلومتر در ساعت .

۵۸. شعاع قاعده استوانه را z و حجم آب ظرف را v فرض می کنیم . اینصورت بنا بر فرض مسئله داریم :

$$v = \pi z^2 \cdot \frac{2}{3}R - \frac{\pi}{3}R^3 ; v = \pi z^2 \cdot \frac{2}{3}mR - \frac{\pi}{3}m^3R^3 ;$$

با مقایسه این دو مقدار خواهیم داشت .

$$\frac{2}{3}\pi z^2 R(m-1) = \frac{\pi}{3}R^3(m^3-1) ;$$

$$z^2 = \frac{R^2}{3}(m^3+m+1) \quad \text{یعنی :}$$

$$z = R\sqrt{\frac{2(m^3+m+1)}{3}} \quad \text{و از آنجا :}$$

مسئله وقتی جواب دارد که $z > R > 0$ باشد .

فرض کنید $m > 1$ باشد ، در اینصورت نامساوی زیر را خواهیم داشت :

$$R\sqrt{\frac{2(m^3+m+1)}{3}} > mR$$

$$m^2 - 2m - 2 < 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 3 < 0 ; \quad \text{یا :}$$

$$(m-1+\sqrt{3})(m-1-\sqrt{3}) < 0 \quad \text{یعنی :}$$

باتوجه باینکه عامل اول مثبت است باید داشته باشیم :

$$m < 1 + \sqrt{3}$$

بنابراین مسئله وقتی جواب دارد که داشته باشیم :

$$1 < m < 1 + \sqrt{3}$$

۵۹. فرض می کنیم که قرض پس از t سال پرداخت شود . چون نرخ بهره ۳٪

است ، هر یک ریال در سال به $1/03$ ریال و ۱۰۰۰۰ ریال به $10000 \times 1/03$

ریال تبدیل می‌شود. بعد از t سال هر هزار ریال تبدیل به $۱۰۰۰ \times ۱/۰۳^t$ ریال می‌شود. از طرف دیگر درآمد t سال مبلغ پرداختی چنین است:

$$۹۰ \times ۱/۰۳ \times ۹۰ \times ۱/۰۳^2 + ۹۰ \times ۱/۰۳^3 + \dots +$$

$$+ ۹۰ \times ۱/۰۳^{t-1} + ۹۰ \times ۱/۰۳^t = \frac{۹۰ \times ۱/۰۳ (۱/۰۳^t - ۱)}{۰/۰۳}$$

و چون باید پس از t سال پرداخت تمام شود، تساوی زیر را خواهیم داشت:

$$۱۰۰۰ \times ۱/۰۳^t = \frac{۹۰ \times ۱/۰۳ (۱/۰۳^t - ۱)}{۰/۰۳}$$

$$۱/۰۳^t = \frac{۳۰۹}{۲۰۹} \quad \text{و یا:}$$

$$t = \frac{۱۶۹۹}{۱۲۸} \quad \text{که پس از محاسبات لگاریتمی خواهیم داشت:}$$

جواب: $۱۳/۳$ سال.

۶۰. جواب: ۱۵ لیتر

۶۱. جواب: اولی در ۲۷ ساعت و دومی در ۲۴ ساعت.

۶۲. جواب: ۸ کیلوگرم و ۱۲ کیلوگرم.

۶۳. جواب: $۹/۵۷$

۶۴. جواب: ۱۵ کیلومتر و ۷ کیلومتر در ساعت.

۶۵. جواب: ۳۵ سطر، ۳۸ حرف.

۶۶. جواب: ۳ ریال، $n=۲$

۶۷. راهنمایی: داریم:

$$x + y = x \cdot y = (x + y)(x - y)$$

$$x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1 \quad \text{از آنجا:}$$

$$y_{۱,۲} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad x_{۱,۲} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{جواب:}$$

$$* \frac{a \pm \sqrt{c^2 - b^2}}{2} \quad \text{جواب : ۶۸}$$

$$* \frac{a \pm \sqrt{c^2 - b^2}}{2} \quad \text{جواب : ۶۹} \quad t \neq 4/7 \quad (\text{بر حسب سال}).$$

$$* \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{np}{t} + \frac{p}{2}} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{np}{t} - \frac{p}{2}} \quad \text{جواب : ۷۰}$$

$$* \text{جواب : ۷۱} \quad \text{سرعت قطار ۴۴ کیلومتر در ساعت و سرعت کشتی ۱۴ کیلومتر در ساعت است.}$$

$$* \text{جواب : ۷۳} \quad \text{اولی ۱۵ قطعه و دومی ۲۰ قطعه.}$$

$$* \text{جواب : ۷۴} \quad \text{اولی در ۳ ساعت، دومی در ۶ ساعت و سومی در ۲ ساعت.}$$

$$* \text{جواب : ۷۶} \quad \text{۶۰ کیلومتر در ساعت و ۸۰ کیلومتر در ساعت.}$$

§ ۲. تبدیل عبارتهای جبری

$$* \text{۷۸. اگر پرا تنزها را باز کنیم داریم :}$$

$$\begin{aligned} P &= a^2b + 2abc + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 = \\ &= a^2(b+c) + ab(b+c) + ac(b+c) + bc(b+c) = \\ &= (b+c)(a^2 + ab + ac + bc) = \\ &= (b+c)[a(a+b) + c(a+b)] = (b+c)(a+b)(a+c) \end{aligned}$$

(*) جواب این مسئله با صورت آن تطبیق نمی‌کند و ظاهراً چهار عدد تشکیل تصاعد هندسی نمی‌دهند، بلکه فقط حاصلضرب دو عدد اول و چهارم یا حاصلضرب دو عدد دوم و سوم برابر می‌شود و چهار عدد چنین‌اند :

$$\frac{a - \sqrt{c^2 - b^2}}{2} ; \frac{b - \sqrt{c^2 - a^2}}{2} ; \frac{b + \sqrt{c^2 - a^2}}{2} ;$$

$$\frac{a + \sqrt{c^2 - b^2}}{2}$$

که شامل بقیه شرایط مسئله هم هستند «مترجم».

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) \quad \text{جواب :}$$

۷۹. داریم :

$$\begin{aligned} P &= (a+b)^2 + 2(a+b)^2c + 2(a+b)c^2 + c^2 - (a^2 + b^2) - c^2 = \\ &= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + 2c^2 - a^2 + ab - b^2) \\ &= (a+b)(2ab + 2ac + 2bc + 2c^2) = \\ &= 2(a+b)[a(b+c) + c(b+c)] = 2(a+b)(b+c)(a+c) \end{aligned}$$

$$P = 2(a+b)(b+c)(c+a) \quad \text{جواب :}$$

۸۰. بترتیب داریم :

$$P = x^2 + 6x^2 - x^2 + 9x - 6x - 9 = (x-1)(x^2 + 6x + 9)$$

$$P = (x-1)(x+3)^2 \quad \text{جواب :}$$

۸۱. می‌توان از تجزیه دوجمله‌ای $x^4 + 1$ استفاده کرد :

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = \\ &= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

اکنون می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + \sqrt{2}x + 2 &= (x^2 + 1) + (x^2 + \sqrt{2}x + 1) = \\ &= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (x^2 + \sqrt{2}x + 1) = \\ &= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 2) \end{aligned}$$

۸۲. داریم :

$$\begin{aligned} P &= x(x^4 + x^2 + 1) + (x^4 + x^2 + 1) = (x+1)(x^4 + x^2 + 1) = \\ &= (x+1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) = \\ &= (x+1)[(x^2 + 1)^2 - x^2] = \\ &= (x+1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

۸۳. عبارت را بترتیب چنین می‌نویسیم :

$$\begin{aligned} P &= a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 2a^2b - 2ab^2 = \\ &= (a+b)^2 + c^2 - 2ab(c+a+b) = \end{aligned}$$

$$= (a+b+c)[(a+b)^r - (a+b)c + c^r] - rab(a+b+c) = \\ = (a+b+c)(a^r + b^r + c^r - ab - ac - bc)$$

۸۴. داریم :

$$ay^r - xy^r - ax^r + x^r y + a^r(x-y) = \\ = xy(x^r - y^r) - a(x^r - y^r) + a^r(x-y) = \dots = \\ = (x-y)[x^r(y-a) + xy(y-a) - a(y^r - a^r)] = \\ = (x-y)(y-a)(x^r + xy - ay - a^r) = \dots = \\ = (x-y)(x-a)(y-a)(a+x+y).$$

۸۵. راهنمایی :

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)^r - x^n = \frac{(1-x^n)(1-x^{n+r})}{(1-x)^r} = \\ = \frac{1-x^n}{1-x} \times \frac{1-x^{n+r}}{1-x}$$

$$(1+x+x^r+\dots+x^{n-1})(1+x+\dots+x^{n+r}) \quad \text{جواب :}$$

۸۶. عامل مجهول برابر است با خارج قسمت تقسیم عبارت مفروض بر عامل معلوم.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \frac{a^r - b^r}{a^r + b^r} \quad \text{جواب :}$$

۸۷. راهنمایی :

$$P = (x^{10} + x^9 + x^8) - (x^9 + x^8 + x^7) + (x^8 + x^7 + x^6) - \\ - (x^7 + x^6 + x^5) + (x^6 + x^5 + x^4) - (x^5 + x^4 + x^3) + \\ + (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1)$$

$$P = (x^r + x + 1)(x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1) \quad \text{جواب :}$$

۸۸. داریم :

$$P = (\sqrt{b^r} - \sqrt{a^r})\sqrt{a^r b^r} + (\sqrt{a^r} - \sqrt{b^r})\sqrt{c^r} + (\sqrt{b^r} - \sqrt{a^r})\sqrt{c^r} = \\ = (\sqrt{a^r} - \sqrt{b^r})[(\sqrt{a^r} + \sqrt{b^r})\sqrt{c^r} - \sqrt{a^r b^r} - \sqrt{c^r}] =$$

$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{c})\sqrt{c}-\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}\sqrt{c}=$$

$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{c}-\sqrt{b})$$

$$P=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{c}) \times (\sqrt{c}-\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{b}). \quad \text{جواب :}$$

$$\frac{1}{a+c} \quad \text{.۸۹ جواب :}$$

$$\frac{a-x}{a^2x^2} \quad \text{.۹۰ جواب :}$$

$$\frac{3(x-2)}{2(x+3)} \quad \text{.۹۱ جواب :}$$

$$3 \quad \text{.۹۲ جواب :}$$

$$\text{.۹۳ راهنمایی :}$$

$$P = \frac{\sqrt{xy} [1 - xy(x^r + y^r)]}{1 + \sqrt{xy(x^r + y^r)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{xy} [1 + \sqrt{xy(x^r + y^r)}] [1 - \sqrt{xy(x^r + y^r)}]}{1 + \sqrt{xy(x^r + y^r)}} =$$

$$= \sqrt{xy} [1 - \sqrt{xy(x^r + y^r)}]$$

$$P = \sqrt{xy} - xy\sqrt{x^r + y^r} \quad \text{جواب :}$$

$$\text{.۹۴ داریم :}$$

$$P = \left[\frac{\sqrt{ax}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}} \right]^{-2} \times \sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{ax}} \right)^{-2} \left(1 + \sqrt{\frac{a}{x}} \right) = \sqrt{a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})$$

$$P = a + \sqrt{ax} \quad \text{جواب :}$$

۹۵. داریم :

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \times \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} = \\ &= \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \times \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} = \\ &= \frac{2a}{(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a})^2} \times \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} = -1 \end{aligned}$$

۹۶. راهنمایی : فرض کنید :

$$(a+b)^{-\frac{1}{r}} = u \quad ; \quad (a-b)^{-\frac{1}{r}} = v$$

$$P = -\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \quad \text{جواب}$$

$$P = \sqrt{2} \quad \text{جواب : ۹۸}$$

$$P = \sqrt{2} + \sqrt{6} \quad \text{جواب : ۹۹}$$

۱۰۰. داریم :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt[r]{\frac{(n^r+1)^r}{n^r}} + \sqrt[r]{\frac{(n^r-1)^r}{n^r}} + \sqrt[r]{\frac{(n^r-1)^r}{n^r}}} = \\ &= \dots = \frac{\sqrt[r]{n^r}}{2(n^r + \sqrt{n^r-1})} = \frac{(n^r - \sqrt{n^r-1})\sqrt[r]{n^r}}{2} \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{2} (n^r - \sqrt{n^r-1})\sqrt[r]{n^r} \quad \text{جواب :}$$

$$P = \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \quad \text{جواب : ۱۰۱}$$

۱۰۲. پس از ساده کردن خواهیم داشت :

$$P = \frac{2x^2}{x^4 - 16y^4}$$

$$P = -\frac{1}{11} \quad \text{جواب :}$$

۱۰۳. اگر بجای x مقدارش را قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}} \right) = \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = 1 \end{aligned}$$

۱۰۴. جواب : صفر

۱۰۵. پس از ساده کردن ، عبارت مفروض بصورت $x\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}$ درمی آید
و اگر بجای x مقدارش را قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$x\sqrt{x}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2a}} \times \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2a}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2a}} = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2a}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2a}} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{b}{2a}$$

جواب : $\frac{b}{2a}$

۱۰۶. داریم :

$$a+1 = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + 1 = 3 - \sqrt{3} ;$$

$$b+1 = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 1 = 3 + \sqrt{3}$$

$$P = \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} = 1$$

جواب : $P=1$

۱۰۷. جواب : صفر

۱۰۸. داریم :

$$P = x^{\frac{1}{m}} + x^{\frac{1}{n}} + 2x^{\frac{m+n}{mn}} - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{m+n}{mn}} =$$

$$= x^{\frac{1}{m}} \left[\left(1 + x^{\frac{m+n}{mn}} \right)^2 - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{m+n}{mn}} \right] =$$

$$= x^{\frac{1}{m}} \left(1 + x^{\frac{m-n}{mn}} - 2ax^{\frac{m-n}{mn}} \right) \left(1 + x^{\frac{m-n}{mn}} + 2ax^{\frac{m-n}{mn}} \right) = 0$$

زیرا داریم :

$$1 + x^{\frac{m-n}{mn}} - 2ax^{\frac{m-n}{mn}} = 1 + (a + \sqrt{a^2 - 1})^2 -$$

$$- 2a(a + \sqrt{a^2 - 1}) = 1 + (a + \sqrt{a^2 - 1})(\sqrt{a^2 - 1} - a) =$$

$$= 1 + a^2 - 1 - a^2 = 0$$

جواب : صفر

$$\frac{m^2}{n^2} : \text{جواب : } ۱۰۹$$

۱۱۰. داریم :

$$\frac{1}{(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{2})}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{2}) : \text{جواب:}$$

۱۱۱. مخرج را به صورت ضرب دو عامل تجزیه می کنیم :

$$\frac{1}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{2} - 1)} = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{2} - 1)$$

۱۱۲. داریم :

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) + 1} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{[(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) + 1](\sqrt[3]{2} - 1)} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{(\sqrt[3]{2} - 1)\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} : \text{جواب}$$

$$2(\sqrt[3]{121} + \sqrt[3]{55} + \sqrt[3]{25}) : \text{جواب : } ۱۱۳$$

۱۱۴. داریم :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} \times 2 + \sqrt[3]{2^2})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{3 - 2} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$$

توضیح . روش کلی گویا کردن مخرج کسرهائی را که مخرج آنها از مجموع جبری سه ریشه سوم تشکیل شده است ، در تمرین شماره ۱۱۵ به بینید .
۱۱۵ . از اتحاد زیر استفاده می کنیم :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz).$$

و فرض می کنیم :

$$x = \sqrt[3]{a} ; y = \sqrt[3]{b} ; z = \sqrt[3]{c}$$

خواهیم داشت :

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ac})$$

بنابراین برای گویا کردن مخرج کسر مورد نظر قبلا باید صورت و مخرج را در عبارت زیر ضرب کنیم :

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ac}$$

یعنی :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ac}}{a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{(a + b + c)^3 - 3\sqrt[3]{abc}}}$$

اگر حاصلضرب abc مکعب کامل باشد ، مخرج در همین جا گویا خواهد بود .
در غیر این صورت صورت و مخرج کسر را در عبارت زیر ضرب می کنیم :

$$(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ac}) \times \quad \text{جواب :}$$

$$\frac{\times [(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}]}{(a + b + c)^3 - 3\sqrt[3]{abc}}$$

۱۱۶. در این کسر، چهار جمله منخرج تشکیل یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $\sqrt[4]{2}$ داده اند و بنابراین داریم:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} + 2} = \frac{1}{\frac{\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1}} = \frac{\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[4]{2} - 1)\sqrt[4]{8}}{2 - \sqrt[4]{8}} = \frac{2 - \sqrt[4]{8}}{2}$$

جواب: $1 - \frac{1}{2}\sqrt[4]{8}$

۱۱۷. اگر فرض کنیم:

$$\sqrt[n]{a} = x ; \sqrt[n]{b} = y$$

$$a = x^n ; b = y^n$$

یعنی:

می توانیم بنویسیم:

$$a - b = (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}})$$

ادامه کار روشن است.

$$\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}}{a - b} \quad \text{جواب:}$$

۱۱۸. داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2 - \sqrt{9}} = \dots$$

جواب: $\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}(\sqrt{2} - \sqrt{3})(4 + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{3})$

$$۱۱۹. \text{ جواب : } \frac{(5 + \sqrt{3})^5}{225}$$

۱۲۰. اگر فرض کنیم :

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{1}{k} ;$$

$$x = ak ; y = bk ; z = ck ; k = \frac{x+y+z}{a+b+c}$$

بنابراین داریم :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + k(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} = \\ & = \frac{1}{(1 + \sqrt{k})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} = \dots = \\ & = \frac{(1 - \sqrt{k})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(1 - k)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)} \end{aligned}$$

و اگر در عبارت اخیر بجای k مقدارش را قرار دهیم ، کسر مطلوب بدست می آید .

جواب :

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a+b+c} (\sqrt{a+b+c} - \sqrt{x+y+z}) \times \\ & \times (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(a+b+c-x-y-z)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)} \end{aligned}$$

۱۲۱. صورت کسر بسادگی تجزیه می شود و اگر در مخرج کسر جمله $\sqrt{a^2 b^2}$ را یکبار اضافه و یکبار کم کنیم ، مخرج هم تجزیه می شود و بترتیب داریم :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\sqrt{a^4} + \sqrt{a^2 b^2} - 2\sqrt{a^2 b}}{\sqrt{a^4} + \sqrt{a^2 b^2} - \sqrt{a^2 b} + \sqrt{a^2 b^2} - \sqrt{a^2 b^2} - \sqrt{b^4}} = \\
 &= \frac{(\sqrt{a^2} - 2\sqrt{ab} + \sqrt{b^2}) \sqrt{a^2}}{(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2})(\sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{b^2})} = \\
 &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \sqrt{a^2}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{b^2})} = \\
 &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \sqrt{a^2}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{b^2})} = \frac{a - \sqrt{a^2 b}}{a + b} \\
 &\quad \frac{a - \sqrt{a^2 b}}{a + b} : \text{جواب}
 \end{aligned}$$

۱۲۳. داریم :

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b)^2 + c^2 - 2ab(a + b) = \\
 &= -2ab(a + b) = 2abc
 \end{aligned}$$

زیرا $a + b = -c$ و $(a + b)^2 = -c^2$ می باشد

۱۲۴. راهنمایی : پرانتز های سمت راست تساوی را باز کنید و پس از جمع

جملات متشابه به ضرب تبدیل کنید .

۱۲۵. فرض می کنیم :

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = x;$$

بدست می آید :

$$x^2 = 2(a + \sqrt{a^2 - b}) = 2 \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} \right);$$

و از آنجا :

$$x = 2 \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

و بنابراین .

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad (۱)$$

و شبه آن :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad (۲)$$

با کمک روابط (۱) و (۲) اتحاد مجهول بدست می آید.

۱۲۶. راهنمایی : دورادیکال آخر را در هم ضرب کنید $\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$

بدست می آید . از ضرب این رادیکال در رادیکال دوم به نتیجه $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ می رسید و از ضرب آن در رادیکال اول حاصل برابر واحد می شود .
۱۲۷. فرض می کنیم :

$$z=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

در این صورت :

$$\begin{aligned} z^3 &= (20+14\sqrt{2}) + (20-14\sqrt{2}) + \\ &+ 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \\ &\quad + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}) = \\ &= 40 + 3\sqrt[3]{20^2 - 2 \times 14^2} z = 40 + 6z \end{aligned}$$

$$z^3 - 6z - 40 = 0 \quad (۱) \quad \text{و یا :}$$

میدانیم که اگر يك معادله جبری دارای ضرایب صحیح باشد و ضریب بزرگترین درجه مجهول آن هم برابر واحد باشد، در این صورت ریشه های گویای معادله اعداد صحیحی خواهند بود و این ریشه های صحیح هم مقسوم علیه های مقدار ثابت معادله اند. بسادگی معلوم می شود که $z=4$ در معادله صدق می کند . معادله را تجزیه می کنیم :

$$(z-4)(z^2+4z+10)=0$$

اگر عامل دوم را مساوی صفر قرار دهیم . ریشه های موهومی بدست می آید ،
بنابراین معادله (۱) يك ریشه حقیقی و دو ریشه موهومی دارد .

جواب : $z = ۴$

۱۲۸ . شبیه تمرین قبل حل می شود .

۱۲۹ . مقادیر سمت چپ و سمت راست این تساوی مثبت است ، بنابراین اگر
مجذور های آنها برابر باشند ، خود آنها هم برابرند . طرفین تساوی را
مجذور می کنیم ، بدست می آید :

$$8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{64 - 4(10 + 2\sqrt{5})} + \\ + 8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 2(6 - 2\sqrt{5}) = 2(\sqrt{5} - 1)$$

۱۳۴ . معادله را بصورت زیر می نویسیم :

$$(x-a)^2 - 3(x-a)bcp - b^2p - c^2p^2 = 0$$

و سپس بجای z مقدارش را قرار می دهیم :

$$(bp^{\frac{1}{2}} + cp^{\frac{2}{2}})^2 + 3(bp^{\frac{1}{2}} + cp^{\frac{2}{2}})bcp - b^2p - c^2p^2 = 0$$

که پس از تبدیلات مقدماتی صحت آن ثابت می شود .

۱۳۵ . فرض می کنیم :

$$a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} ; b = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

بدست می آید :

$$a^2 + b^2 = -2q ; ab = -p$$

و چون $x_0 = a + b$ است بنابراین :

$$x_0^3 = (a+b)^3 = a^2 + b^2 + 3ab(a+b) ;$$

یا :

$$x_0^3 = -2q - 3px_0 \Rightarrow x_0^3 + 3px_0 + 2q = 0$$

* ۱۳۶ . مخارج مشترک می گیریم و صورت کسر را به ضرب عوامل اول تجزیه

می‌کنیم ، چنین می‌شود:

$$\frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{12} + \frac{7x^3}{24} + \frac{5x^2}{12} + \frac{x}{5} =$$

$$= \frac{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)x}{120}$$

صورت کسر حاصلضرب ۵ عدد متوالی است و بنابراین بین آنها حتماً دو عدد زوج متوالی وجود دارد . ازدو عدد زوج متوالی یکی بر ۲ و دیگری بر ۴ قابل قسمت است و در نتیجه حاصلضرب آنها بر ۸ قابل قسمت است. ضمناً حاصلضرب ۳ عدد متوالی بر ۳ و حاصلضرب ۵ عدد متوالی بر ۵ هم قابل قسمت است ، از آنجا صورت کسر بر $8 \times 5 \times 3 = 120$ قابل قسمت خواهد بود.

۱۳۷. داریم:

$$\frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow$$

$(bc+ac+ab)(a+b+c) - abc = (a+b)(b+c)(c+a) = 0$

و وقتی این حاصلضرب برابر صفر است که لااقل یکی از آنها مساوی صفر باشد و صفر بودن یکی از این عوامل بمعنای آنست که دو عدد از آنها قرینه یکدیگرند .

۱۳۸. راهنمایی : عبارت مفروض را بصورت زیر بنویسید :

$$\frac{(2n+3)^2 + 11}{121}$$

۱۳۹. سه عدد صحیح متوالی را $x-1$ ، x و $x+1$ میگیریم ، در اینصورت داریم :

$$N = (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 3x(x^2+2)$$

در تقسیم x بر ۳ باقیمانده‌ای مساوی صفر ، ۱ یا ۲ بدست می‌آید ، بنابراین عدد x را می‌توان بصورت $3n$ ، $3n+1$ یا $3n+2$ نوشت ، از آنجا :

$$N = 9n(9n^2+2)$$

$$N = 9(3n+1)(3n^2+2n+1)$$

$$N = 9(3n+2)(3n^2+4n+2)$$

و باین ترتیب بازاء هر مقداری از x عدد n بر ۹ قابل قسمت است.

۱۴۱. صورت ومخرج را تجزیه کنید :

$$P = \frac{(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z)}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

$$P = x + y + z \quad \text{: جواب}$$

۱۴۲. مجموع ضرایب هر کثیرال جمله ای مانند $f(x)$ برابر است با $f(1)$ ،

بنابراین اگر $x=1$ فرض کنیم، داریم :

$$(6-5+4-3+1-2)^{1962} = 1$$

۱۴۳. جواب : ۱

۱۴۴. اگر در هر پرانتز جملات باتوانهای زوج وفرد را از هم جدا کنیم ،

داریم :

$$\begin{aligned} & [(1+x^2+x^4+\dots+x^{100})-(x+x^3+x^5+\dots+x^{99})] \times \\ & \times [(1+x^2+x^4+\dots+x^{100})+(x+x^3+x^5+\dots+x^{99})] = \\ & = (1+x^2+x^4+\dots+x^{100})^2 - x^2(1+x^2+x^4+\dots+x^{98})^2 \end{aligned}$$

و همانطور که می بینیم در نتیجه ضرب ، جملات شامل توانهای فرد x وجود ندارد .

۱۴۵. بترتیب داریم :

$$\begin{aligned} P &= (x^2+8x+15)(x^2+8x+7)+15 = (x^2+8x)^2 + \\ &+ 22(x^2+8x)+120 = \\ &= (x^2+8x+11)^2 - 1 = (x^2+8x+10)(x^2+8x+12) \end{aligned}$$

جواب :

$$P = (x+4+\sqrt{6})(x+4-\sqrt{6})(x+2)(x+6)$$

۱۴۶. داریم :

$$P = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10 = (x^2 - 7x)^2 \times \\ + 18(x^2 - 7x) + 82 = (x^2 - 7x + 9)^2 + 1$$

مقدار جمله اول بازاء همه مقادیر x غیر منفی است و بنابراین حاصل عبارت همیشه مثبت است .

۱۴۷. تبدیلات زیر را انجام می دهیم:

$$P = (x-1)(x-4)(x-2)(x-3) + 10 = \\ = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 10 = \\ = [(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 + 1] + 9 = \\ = (x^2 - 5x + 5)^2 + 9$$

و می نیمم این عبارت وقتی حاصل می شود که مقدار داخل پرانتز مساوی صفر باشد .

جواب : ۹

۱۴۸. داریم :

$$(1 + \sqrt{10})^{100} = 1 + 100\sqrt{10} + \dots + \sqrt{10^{100}} ;$$

$$(1 - \sqrt{10})^{100} = 1 - 100\sqrt{10} + \dots + \sqrt{10^{100}}$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$\sqrt{10}[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100}] = \\ = \sqrt{10}[200(\sqrt{10} + \sqrt{10^3} + \dots + \sqrt{10^{99}})]$$

یعنی عددی است صحیح.

۱۴۹. عدد مورد نظر را (در دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰) می توان

چنین نوشت :

$$\underbrace{444 \dots 4}_{n} \underbrace{888 \dots 8}_{n-1} = 4 \times \underbrace{111 \dots 1}_n \times 10^n + 8 \times \underbrace{111 \dots 1}_n + 1$$

از طرف دیگر داریم :

$$\underbrace{111\dots1}_n = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10^2 + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{9}$$

و بنابراین :

$$\begin{aligned} 444\dots 89 &= \frac{4}{9}(10^n - 1) \times 10^n + \frac{1}{9}(10^n - 1) + 1 = \\ &= \frac{4}{9} \times 10^{2n} + \frac{4}{9} \times 10^n + \frac{1}{9} = \left(\frac{2 \times 10^n + 1}{3} \right)^2 \end{aligned}$$

مجموع ارقام عدد $2 \times 10^n + 1$ مضرب ۳ است و بنابراین عددی که در داخل پرانتز صورت کسر است بر ۳ قابل قسمت است یعنی عدد داخل پرانتز عددی است صحیح و همانطور که می بینیم عدد مورد نظر مجذور یک عدد صحیح است .

۱۵۰. داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x+y+z} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz(x+y+z)} = 0$$

$$(x+y)(y+z)(z+x) = 0 \quad (1) \quad \text{یعنی:}$$

بهمین ترتیب تساوی دوم را می توان چنین نوشت :

$$(x^n + y^n)(y^n + z^n)(z^n + x^n) = 0 \quad (2)$$

وقتی که n عددی فرد باشد می توان از تساوی (۱) ، تساوی (۲) را نتیجه گرفت . درحقیقت اگر مثلاً $y + z = 0$ باشد $y = -z$ می شود و داریم :

$$y^n + z^n = -z^n + z^n = 0$$

۱۵۱. به تمرین ۱۵۲ مراجعه کنید .

۱۵۲. فرض می کنیم :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

طرفین تساوی را مجذور می‌کنیم؛ بدست می‌آید:

$$a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$$

و از آنجا:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2\sqrt{xy} = \sqrt{b} \\ 2\sqrt{xz} = \sqrt{c} \\ 2\sqrt{yz} = \sqrt{d} \end{cases} \quad (۱)$$

باین ترتیب با حذف x و y و z بین چهار رابطه فوق شرط وجود جواب بدست می‌آید. x و y و z را بین معادلات (۱) حذف می‌کنیم:

$$xy = \frac{b}{4} ; \quad xz = \frac{a}{4} ;$$

$$yz = \frac{d}{4} ; \quad xyz = \frac{\sqrt{bcd}}{8}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{bc}{d}} \\ y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{bd}{c}} \\ z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{cd}{b}} \end{cases} \quad (۲)$$

از معادلات (۱) و (۲) رابطه مورد نظر بدست می‌آید:

$$a = \frac{bc + bd + cd}{2\sqrt{bcd}}$$

که در آن bcd باید مربع کامل باشد .

§ ۳. معادلات و دستگاه معادلات درجه اول

۱۵۳. جواب : $x = a + b + c$

۱۵۴. جواب : $x = a$

۱۵۵*. جواب : $x = ab + bc + ca$

۱۵۶*. جواب : $x = \frac{a \cdot b}{c}$

۱۵۷. جواب : $u = 2, v = 1$

۱۵۸. جواب :

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} \\ y_2 = \frac{11}{2} \end{cases}; \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{11}{2} \end{cases}$$

۱۶۲. جواب : $x = 1, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{5}, v = \frac{1}{7}$

۱۶۷. جواب : $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n+1}$

۱۶۸. جواب : $(i = 1, 2, \dots, n) x_i = \pm \sqrt{2}$

۱۶۹. جواب :

$$x_1 = 1 + \frac{n(n-1)}{2}; x_2 = -1; x_3 = -2; \dots; x_n = -(n-1)$$

۱۷۰. جواب :

$$x_1 = \frac{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n^2(n+1)} - \frac{a_1 - a_2}{n}; \dots$$

§ ۴. معادلات درجه دوم . معادلات از درجات بالاتر

۱۷۱. واضح است که اگر معادله درجه دوم $x^2 + px + q = 0$ با ضرایب گویای p و q ریشه‌ای مساوی $x_1 = 4 - \sqrt{3}$ داشته باشد ، ریشه دیگر آن مساوی $x_2 = 4 + \sqrt{3}$ (مزدوج ریشه اول) خواهد بود و از آنجا :

$$p = -(4 + \sqrt{3} + 4 - \sqrt{3}) = -8$$

$$q = (4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}) = 16 - 3 = 13$$

و معادله درجه دوم مطلوب چنین است :

$$x^2 - 8x + 13 = 0$$

۱۷۲. اگر یکی از ریشه‌ها $x_1 = 2 + 5i$ باشد، ریشه دیگر $x_2 = 2 - 5i$ خواهد بود . از آنجا :

$$p = -(x_1 + x_2) = -4$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = 29$$

و معادله مورد نظر چنین می‌شود :

$$x^2 - 4x + 29 = 0$$

۱۷۳. فرض کنید $x_1 > x_2$ باشد ، در این صورت :

$$\begin{aligned} x_1^3 - x_2^3 &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} [(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] = \\ &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} [(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] = 1 \end{aligned}$$

زیرا $x_1 x_2 = \frac{21}{16}$ ، $x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{85}}{4}$ است.

۱۷۴. صورت و مخرج کسر را بشکل زیر تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{3(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2}{4 x_1 x_2 (x_1 + x_2)}$$

و از روابط ویت استفاده می‌کنیم .

۱۷۵. ریشه های معادله مفروض را x_1 و x_2 و معادله مطلوب را

$x^2 + px + q = 0$ فرض می‌کنیم ، در اینصورت داریم :

$$p = -[-(x_1 + x_2)] = -\frac{b}{a} ; \quad (۱)$$

$$q = (-x_1)(-x_2) = \frac{c}{a} ;$$

از آنجا معادله چنین می‌شود :

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow ax^2 - bx + c = 0$$

(۲) داریم :

$$p = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{-(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{c} ;$$

$$q = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c}{a} ;$$

از آنجا معادله مجهول بدست می‌آید :

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0 \Rightarrow cx^2 + bx + a = 0$$

(۳) داریم :

$$p = -(x_1 + x_2 + 2n) = -\left(-\frac{b}{a} + 2n\right) = \frac{b}{a} - 2n ;$$

$$q = (x_1 + n)(x_2 + n) = x_1 x_2 + n(x_1 + x_2) + n^2 = \\ = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2$$

و معادله چنین است :

$$x^2 + \left(\frac{b}{a} - 2n\right)x + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2 = 0$$

$$ax^2 + (b - 2an)x + (an^2 - bn + c) = 0 \quad \text{و یا :} \\ (۴) \text{ داریم :}$$

$$p = -n(x_1 + x_2) = \frac{nb}{a};$$

$$q = n^2 x_1 x_2 = \frac{n^2 c}{a}$$

و معادله چنین است :

$$x^2 + \frac{nb}{a}x + \frac{n^2 c}{a} = 0 \Rightarrow ax^2 + nbx + n^2 c = 0$$

۱۷۶: حل شبیه تمرین قبل است .

$$a^2 x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0 \quad \text{جواب :}$$

۱۷۷. برای اینکه معادله درجه دوم دوریشه مساوی داشته باشد باید مبین آن مساوی صفر شود یعنی :

$$\Delta = [2(\lambda + 1)]^2 - 4(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{5} \quad \text{و از آنجا :}$$

* ۱۷۸. ریشه های این معادله وقتی گویا هستند که مبین آن مجذور کامل باشد. باید داشته باشیم :

$$\Delta = 1 + 4k = 1^2 \Rightarrow 4k = (1+1)(1-1)$$

روشن است که l باید عددی فرد باشد تا حاصلضرب $(l+1)(l-1)$ بر ۴ قابل قسمت شود فرض می‌کنیم:

$$l = 2m + 1$$

در این صورت داریم:

$$k = m(m+1)$$

که بازاء مقادیر صحیح m جوابهای k بدست می‌آید.

جواب: $k = 0$ و 2 و 6 و 12 و $20 \dots m(m+1) \dots$

۱۷۹. اگر ریشه‌های معادله را x_1 و x_2 فرض کنیم، طبق شرط مسئله داریم:

$$x_1 = 2x_2 \quad (1)$$

و طبق روابط ویت:

$$x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{2} \quad (2)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 - 9m + 29}{2} \quad (3)$$

اگر در روابط (۲) و (۳) بجای x_1 مقدارش را از رابطه (۱) قرار دهیم، می‌شود:

$$\begin{cases} 3x_2 = \frac{2m+1}{2} \\ 2x_2^2 = \frac{m^2 - 9m + 29}{2} \end{cases}$$

$$2\left(\frac{2m+1}{6}\right)^2 = \frac{m^2 - 9m + 29}{2} \quad \text{و یا:}$$

$$m^2 - 17m + 70 = 0 \quad \text{یعنی:}$$

$$m_1 = 7; m_2 = 10 \quad \text{و بنابراین:}$$

باقرار دادن این مقادیر در معادله، دو معادله درجه دوم زیر بدست می آید:

$$2x^2 - 15x + 25 = 0$$

$$2x^2 - 21x + 49 = 0$$

$$x_1 = 5 ; x_2 = 2/5 \quad \text{جواب}$$

$$x_1' = 7, x_2' = 3/5$$

۱۸۰. به مسئله ۱۸۱ مراجعه کنید.

$$z^2 - 35z + 216 = 0 \quad \text{جواب}$$

۱۸۱. اگر ریشه معادله مجهول را z فرض کنیم، داریم:

$$z = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{z}$$

مقدار x باید در معادله صدق کند:

$$a\sqrt[3]{z^2} + b\sqrt[3]{z} + c = 0$$

برای گویا کردن این معادله، c را بطرف دوم برده و طرفین را مکعب می کنیم:

$$a^3 z^2 + 3abz (a\sqrt[3]{z^2} + b\sqrt[3]{z}) + b^3 z = -c^3;$$

$$a^3 z^2 - 3abcz + b^3 z + c^3 = 0 \quad \text{یعنی:}$$

$$a^3 z^2 + b(b^2 - 3ac)z + c^3 = 0 \quad \text{جواب:}$$

۱۸۲. ریشه های معادله را x_1 و x_2 می گیریم، داریم:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) =$$

$$= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] =$$

$$= -p(p^2 - 3q) = p(3q - p^2).$$

۱۸۳. ریشه های معادله را x_1 و $x_2 = x_1^2$ می گیریم، بنابر روابط ویت

داریم:

$$x_1 + x_1^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow 4x_1^2 + 4x_1 - 15 = 0$$

از آنجا:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{9}{4} \end{cases}; \begin{cases} x_1' = -\frac{5}{2} \\ x_2' = \frac{25}{4} \end{cases}$$

جواب : $m_2 = \pm \frac{5}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} i, m_1 = \pm \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{5}}$

۱۸۴. جواب : $q = -2, p = 1; p = q = 0$

۱۸۵. ریشه های يك معادله درجه دوم وقتی حقیقی هستند که مبین آن منفی نباشد :

$$4 - \log_2 a \geq 0$$

جواب : $0 < a \leq 16$

۱۸۶. باید دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را حل کنیم :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1-2m}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-1}{2} \\ 3x_1 - 4x_2 = 11 \end{cases}$$

جواب : $m_2 = \frac{33}{8}, m_1 = -2$

۱۸۷. مقدار k ازحل دستگاه زیر بدست می آید :

$$x_1 + x_2 = 2k + 1; x_1 x_2 = k^2 + 2; x_2 = \frac{1}{2} x_1$$

جواب : $k = 4$

۱۸۸. طبق روابط ویت داریم :

$$x_1 + x_2 = a; x_1 x_2 = a - 1$$

و بنابراین :

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a-1) = (a-1)^2 + 1$$

از اینجا روشن است که مقدار $x_1^2 + x_2^2$ وقتی می نیم است که مقدار $a-1$ مساوی صفر شود .

جواب : $a=1$

۱۸۹. x_1 را ریشه مشترک دو معادله فرض کنید . ریشه های معادله اول را x_1 و x_2 و ریشه های معادله دوم را x_1' و x_2' می گیریم ، در این صورت داریم :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a}; & x_1x_2 &= \frac{c}{a}; \\ x_1 + x_2' &= -\frac{b_1}{a_1}; & x_1x_2' &= \frac{c_1}{a_1} \end{aligned} \quad (۱)$$

شرط مطلوب از حذف x_1 و x_2 و x_2' بین معادلات (۱) بدست می آید .
این شرط چنین است :

$$(ca_1 - ac_1)^2 - (ab_1 - ba_1)(bc_1 - cb_1) = 0 \quad (۲)$$

دستگاه (۱) ، شامل چهار معادله سه مجهول است و بنابراین شرط (۲) ، شرط متوافق بودن این معادلات است .

اگر $ab_1 - ba_1 = 0$ باشد ، دو معادله ریشه مشترک ندارند .

اگر $ab_1 - ba_1 \neq 0$ و $ac_1 - ca_1 \neq 0$ باشد دو معادله دارای ریشه مشترک هستند .

و بالاخره اگر $ab_1 - ba_1 = 0$ و $ac_1 - ca_1 = 0$ باشد . معادلات دارای دو ریشه مشترکند ، زیرا در این حالت ضرایب متناسبند و داریم :

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

مثلا در مورد دو معادله :

$$x^2 + \lambda x + 1 = 0$$

$$x^2 + x + \lambda = 0$$

شرط وجود ریشه مشترک چنین است :

$$(1 - \lambda)^2 - (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$$

واز آنجا $\lambda = 1$ و $\lambda = -2$ بدست می آید .

این دو معادله بازاء $\lambda = -2$ يك ریشه مشترک و بازاء $\lambda = 1$ دو ریشه مشترک دارند .

۱۹۰ . برای حل این مسئله می توان از روش عمومی که در مسئله قبل ذکر کردیم استفاده کرد . ولی ما در اینجا آنرا بروش دیگری حل می کنیم :
از معادله اول داریم :

$$m = \frac{2x^2 - 2x + 12}{3x}$$

اگر این مقدار m را در معادله دوم قرار دهیم ، چنین می شود :

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \quad (x_2 = 0)$$

جواب : $m = 3$

۱۹۱ . معادله دو مجذورى مطلوب باید ۴ ریشه $\pm \sqrt{5}$ و $\pm 3i$ داشته باشد
(زیرا ریشه های هر معادله دو مجذورى دودو قرینه یکدیگرند) .
بنابراین :

$$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + 3i)(x - 3i) = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 + 9) = 0$$

$$x^4 + 4x^2 - 45 = 0 \quad \text{جواب :}$$

۱۹۳ . اگر $x^2 - 16x = z$ فرض کنیم ، معادله زیر را خواهیم داشت :

$$z^2 - 2z - 63 = 0$$

واز آنجا : $z_1 = 9$; $z_2 = -7$

و بنابراین :

$$x^2 - 16x - 9 = 0$$

$$x^2 - 16x + 7 = 0$$

$$x_{۳,۴} = ۸ \pm \sqrt{۵۷} , x_{۱,۲} = ۸ \pm \sqrt{۷۳} \quad \text{: جواب}$$

۱۹۴. راهنمایی : $x^2 + x + ۱ = z$ فرض کنید.

$$x_{۳,۴} = \frac{-۱ \pm i\sqrt{۱۹}}{۲} , x_1 = ۱ , x_2 = -۲ \quad \text{: جواب}$$

۱۹۵. اگر $x^2 + ۲x + ۳ = z$ فرض کنیم داریم :

$$\frac{z+۴}{z} = z+۱ \Rightarrow z_1 = ۲ \text{ و } z_2 = -۲$$

$$x_{۳,۴} = -۱ \pm ۲i , x_{۱,۲} = -۱ \quad \text{: جواب}$$

۱۹۶. داریم :

$$(x^2 + ۳x)(x^2 + ۳x + ۲) = \frac{۹}{۱۶}$$

واگر $x^2 + ۳x + ۲ = z$ بگیریم ، بدست می آید :

$$۱۶z^2 - ۳۲z - ۹ = ۰$$

$$x_{۳,۴} = \frac{-۳ \pm ۲\sqrt{۱۰}}{۲} , x_{۱,۲} = \frac{-۳ \pm \sqrt{۲}}{۲} \quad \text{: جواب}$$

۱۹۷. داریم :

$$(x-۴)(x-۷)(x-۵)(x-۶) = ۱۶۸۰ ;$$

$$(x^2 - ۱۱x + ۲۸)(x^2 - ۱۱x + ۳۰) = ۱۶۸۰$$

واگر $x^2 - ۱۱x + ۳۰ = z$ بگیریم به معادله زیر می رسیم :

$$(z-۲)z - ۱۶۸۰ = ۰$$

جواب : ریشه های حقیقی معادله عبارتند از $x_1 = -۱$ و $x_2 = ۱۲$

۱۹۸. طرفین معادله را ۱۶ برابر می کنیم:

$$(۸x+۷)^2(۸x+۶)(۸x+۸) = ۷۲ ;$$

$$(۶۴x^2 + ۱۱۲x + ۴۹)(۶۴x^2 + ۱۱۲x + ۴۸) = ۷۲$$

فرض می کنیم :

$$۶۴x^2 + ۱۱۲x + ۴۸ = z$$

در این صورت معادله زیر را خواهیم داشت :

$$(z+1)z=72 \Rightarrow z_1=8 ; z_2=-9$$

و باین ترتیب حل معادله مفروض به حل دو معادله درجه دوم زیر منجر می شود :

$$64x^2+112x+40=0$$

$$64x^2+112x+57=0$$

$$x_{204} = \frac{-7 \pm 2\sqrt{2}i}{8}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_1 = -\frac{5}{4} : \text{جواب}$$

$$x_{204} = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}, x_2 = 3, x_1 = 2 : \text{جواب} \quad 199$$

۲۰۰ داریم :

$$(x+a)(x-3a)(x+2a)(x-4a)=b^4$$

$$(x^2-2ax-3a^2)(x^2-2ax-4a^2)-b^4=0$$

$$(x^2-2ax)^2-11a^2(x^2-2ax)+24a^4-b^4=0$$

$$x^2-2ax=a^2z : \text{فرض می کنیم}$$

$$a^4z^2-11a^4z+24a^4-b^4=0 : \text{بدست می آید}$$

$$z = \frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{25a^4+2b^4}}{2a^2}$$

$$x^2-2ax = \frac{11a^2 \pm \sqrt{25a^4+2b^4}}{2} : \text{یعنی}$$

$$x = \frac{2a + \sqrt{26a^2 + 2\sqrt{25a^4+2b^4}}}{2} : \text{جواب}$$

$$x + \frac{1}{x} = z \quad 201 : \text{راهنمایی: طرفین معادله را بر } x^2 \text{ تقسیم کنید و سپس}$$

فرض کنید .

$$\text{جواب : } x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} \quad , \quad x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

۳۰۲. داریم :

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 2x^2 + 2$$

$$x^4 - 2x^2 - 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

و اگر $x + \frac{1}{x} = z$ فرض کنیم $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$ می شود و داریم :

$$z^2 - 4z - 8 = 0$$

$$z_1 = 2(1 + \sqrt{3}) \quad ; \quad z_2 = 2(1 - \sqrt{3})$$

$$x + \frac{1}{x} = 2(1 + \sqrt{3}) \quad ; \quad \text{یعنی :}$$

$$x + \frac{1}{x} = 2(1 - \sqrt{3}) \quad ;$$

$$x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + 1 = 0 \quad \text{یا :}$$

$$x^2 - 2(1 - \sqrt{3})x + 1 = 0$$

از حل این دو معادله بدست می آید :

$$x_{1,2} = (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 - 1} = (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})} =$$

$$= (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = (1 + \sqrt{3}) \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

و به همین ترتیب جوابهای معادله دوم بدست می آید :

$$x_{۱و۲} = (1 + \sqrt{3}) \left(1 \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \right); \quad \text{جواب :}$$

$$x_{۳و۴} = (1 - \sqrt{3}) \left(1 \pm \frac{i\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \right)$$

۲۰۳. اگر فرض کنیم $3 - x = z$ و $2 - x = t$ خواهیم داشت:

$$5 - 2x = z + t$$

$$z^4 + t^4 = (z + t)^4$$

یعنی :

$$z^4 + t^4 = z^4 + t^4 + 4z^3t + 6z^2t^2 + 4zt^3$$

$$zt(2z^2 + 3zt + 2t^2) = 0 \quad \text{یا :}$$

بنابراین :

$$z = 0 \Rightarrow 3 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$t = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$2z^2 + 3zt + 2t^2 = 0$$

$$2(3-x)^2 + 3(3-x)(2-x) + 2(2-x)^2 = 0$$

که باحل این معادله درجه دوم دو ریشه دیگر هم بدست می آید.

$$x_{۳و۴} = \frac{35 \pm i\sqrt{7}}{14}, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 3 \quad \text{جواب :}$$

۲۰۴. فرض می کنیم : $x^2 - 2x + 2 = z$ ، دراینصورت معادله

چنین می شود :

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{z+1} = \frac{6}{z+2} \Rightarrow 3z^2 - z - 2 = 0$$

$$z_1 = 1 \text{ و } z_2 = -\frac{2}{3} \quad \text{وازا آنجا :}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{و بنابراین :}$$

$$3x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_{۲,۴} = \frac{3 \pm i\sqrt{15}}{3}, \quad x_{۱,۲} = 1 \quad \text{: جواب}$$

۲۰۵. $6x + 5 = z$ فرض کنید، در این صورت معادله زیر را خواهیم داشت:

$$z^4 - z^2 - 420 = 0$$

$$z_{۱,۲} = \pm\sqrt{21}; \quad z_{۳,۴} = \pm 2\sqrt{5}i$$

$$x_{۳,۴} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}i}{6}, \quad x_{۱,۲} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{6} \quad \text{: جواب}$$

۲۰۶. اگر $\frac{x+1}{x} = z$ فرض کنیم، معادله بصورت زیر درمی آید:

$$4z^4 - 17z^2 + 4 = 0$$

$$z_{۱,۲} = \pm \frac{1}{2}; \quad z_{۳,۴} = \pm 2$$

$$\frac{x+1}{x} = \pm \frac{1}{2}; \quad \frac{x+1}{x} = \pm 2 \quad \text{یعنی :}$$

$$x_4 = 1, \quad x_3 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{2}{3}, \quad x_1 = -2 \quad \text{: جواب}$$

۲۰۷. $\frac{x^2 + x - 1}{x + 1} = u$ می گیریم، در این صورت معادله چنین می شود:

$$\frac{1}{u} + u = 2 \Rightarrow u^2 - 2u + 1 = 0 \Rightarrow u_{۱,۲} = 1$$

باین ترتیب معادله زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{x^2 + x - 1}{x + 1} = 1 \Rightarrow x^2 - 2 = 0$$

اگر $x = z\sqrt[3]{2}$ فرض کنیم ، این معادله چنین می شود:

$$(z-1)(z^2+z+1)=0$$

$$z_1=1 ; z_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_{2,3}=\frac{(-1\pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{2}}{2} , x_1=\sqrt[3]{2} : \text{جواب}$$

۲۰۸. $x^3+1=u$ می گیریم ، در این صورت معادله مفروض چنین می شود :

$$u+\frac{1}{u}=\frac{5}{2} \Rightarrow 2u^2-5u+2=0$$

$$u_1=2 ; u_2=\frac{1}{2}$$

بنابراین :

$$x^3+1=2 \Rightarrow x^3-1=0 \quad (1)$$

$$x^3+1=\frac{1}{2} \Rightarrow x^3+\frac{1}{2}=0 \quad (2)$$

از حل معادله (۱) جوابهای زیر بدست می آید :

$$x_1=1 ; x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

و از حل معادله دوم :

$$x_4=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2} ; x_{5,6}=\frac{(1\pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{4}}{4}$$

۲۰۹. اگر $x+1=u$ بگیریم ، معادله چنین می شود :

$$u^6-9u^3+20=0.$$

و با فرض $u^3=z$ داریم:

$$z^2-9z+20=0 \Rightarrow z_1=4 ; z_2=5$$

و بنا بر این :

$$u^2 = 4 \Rightarrow u^2 - 4 = 0 \quad (۱)$$

$$u^2 = 5 \Rightarrow u^2 - 5 = 0 \quad (۲)$$

از حل معادله اول بدست می آید :

$$u_1 = \sqrt[4]{4} ; u_{2,3} = \frac{(-1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[4]{4}}{2} ;$$

و در نتیجه :

$$x_1 = \sqrt[4]{4} - 1 ; x_{2,3} = \frac{(-1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[4]{4}}{2} - 1$$

و از حل معادله دوم :

$$u_4 = \sqrt[4]{5} ; u_{5,6} = \frac{(-1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[4]{5}}{2} ;$$

و در نتیجه :

$$x_4 = \sqrt[4]{5} - 1 ; x_{5,6} = \frac{(-1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[4]{5}}{2} - 1$$

۴۱۵. فرض می کنیم :

$$5 - x = z + k ; 2 - x = z - k$$

و از آنجا :

$$k = \frac{3}{2} ; x = \frac{7}{2} - z$$

و معادله بصورت زیر درمی آید :

$$\left(z + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = 17$$

$$16z^2 + 216z^2 - 55 = 0 \quad \text{و یا :}$$

$$z_{1,2} = \pm \frac{1}{4} ; z_{3,4} = \pm \frac{i\sqrt{55}}{4} \quad \text{و از آنجا :}$$

$$x_{۲و۴} = \frac{۷ \pm i\sqrt{۵۵}}{۲}, x_۲ = ۴, x_۱ = ۳ : \text{جواب}$$

۲۱۱. راهنمایی : معادله مفروض را می توان بصورت زیر نوشت :

$$(x^۲ - x)^۲ - (x^۲ - x) - ۱۳۲ = 0$$

$$x_{۲و۴} = \frac{۱ \pm i\sqrt{۴۳}}{۲}, x_۲ = ۴, x_۱ = -۳ : \text{جواب}$$

۲۱۲. داریم :

$$۶۸x^۴ - ۲۵۷x^۳ - ۲۵۷x^۲ + ۶۸ = 0;$$

$$۶۸\left(x^۲ + \frac{1}{x^۲}\right) - ۲۵۷\left(x^۲ + \frac{1}{x^۲}\right) = 0;$$

$$۶۸\left(x^۲ + \frac{1}{x^۲}\right)^۲ - ۲۵۷\left(x^۲ + \frac{1}{x^۲}\right) - ۱۳۶ = 0$$

$$x_{۲و۴} = \pm \frac{1}{۲}, x_{۱و۳} = \pm ۲ : \text{جواب}$$

$$x_{۷و۸} = \frac{-\sqrt{۱۳} \pm i\sqrt{۲۱}}{\sqrt{۳۴}}, x_{۵و۶} = \frac{\sqrt{۱۳} \pm i\sqrt{۲۱}}{\sqrt{۳۴}},$$

۲۱۳. اگر $x - ۱ = y$ فرض کنیم ، داریم :

$$\begin{cases} x^۴ + y^۴ = ۹۷ & (۱) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = ۱ & (۲) \end{cases}$$

حالا اگر $x + y = z$ فرض کنیم و آنرا با معادله (۲) حل کنیم ، بدست

می آید :

$$x = \frac{z+۱}{۲}; y = \frac{z-۱}{۲} \quad (۳)$$

و اگر این مقادیر را در معادله (۱) قرار دهیم بدست می آید :

$$\left(\frac{z+1}{2}\right)^4 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^4 = 97;$$

که پس از باز کردن پرانتزها بصورت زیر درمی آید :

$$z^4 + 6z^2 - 775 = 0$$

$$z_1 = 5; z_2 = -5; z_3 = i\sqrt{31}; z_4 = -i\sqrt{31}$$

$$x_{2,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{31}}{2}, \quad x_1 = 3, \quad x_3 = -2 : \text{جواب}$$

$$214. \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm i3\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 5 : \text{جواب}$$

$$x_{5,6} = 3 \pm i\sqrt{3}, \quad x_4 = 0$$

$$215. \quad \text{جواب} : x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$216. \quad \text{جواب} : x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$$

$$217. \quad \text{جواب} : x_1 = -1, \quad x_{2,3} = 2$$

218. طبق فرض مسئله u_1 و u_2 دو جمله متوالی از یک تصاعد هندسی نزولی هستند و بنابراین قدرنسبت تصاعدچنین است :

$$q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{5/5}{1/25} = \frac{2}{5}$$

بادرست داشتن u_1 و q میتوان k را بدست آورد: $k = \frac{25}{12}$

اگر مقدار k را در معادله مفروض قرار دهیم ، چنین می شود:

$$(1+x^2)^2 = \frac{25}{6} x (1-x^2)$$

یا :

$$6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$$

که باحل این معادله ، جوابهای x بدست می آید .

$$x_4 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -2, \quad x_1 = -3 \quad \text{جواب :}$$

$$x_{232} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = -1 \quad \text{جواب : ۲۱۹}$$

$$x_{596} = \frac{\sqrt[3]{6}(1 \pm i\sqrt{3})}{2}, \quad x_4 = \sqrt[3]{6}$$

۲۲۰. سمت چپ معادله را بصورت ضرب تبدیل می کنیم :

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 76x + 30x - 120 = 0 ;$$

$$x^2(x-4) - 19x(x-4) + 30(x-4) = 0 ,$$

$$(x-4)(x^2 - 19x + 30) = 0$$

$$(x-4)(x^2 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 10x + 30) = 0$$

$$(x-4)(x-3)(x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$x-4=0, \quad x-3=0,$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x_4 = -5, \quad x_3 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_1 = 4 \quad \text{جواب :}$$

$$x_{234} = -1 \pm i\sqrt{3}, \quad x_3 = 2, \quad x_1 = 1 \quad \text{جواب : ۲۲۱}$$

$$x_{596} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

۲۲۲. فرض می کنیم :

$$a-x=z+n, \quad b-x=z-n$$

از آنجا بدست می آید :

$$x = \frac{a+b}{2} - z = m - z \quad (۱)$$

که در آن داریم :

$$m = \frac{a+b}{2}, n = \frac{a-b}{2} ; a = m+n ; b = m-n$$

و اگر در معادله قرار دهیم بصورت زیر درمی آید :

$$\frac{(z+n)^2 + (z-n)^2}{2z^2} = \frac{(m+n)^2 + (m-n)^2}{2m^2}$$

یعنی :

$$m^2 z^2 - (m^2 + n^2) z^2 + n^2 m^2 = 0$$

$$z^2 = \frac{m^2 + n^2 \pm (m^2 - n^2)}{2m^2} \quad \text{و از آنجا :}$$

$$z^2 = m^2 \Rightarrow z_{1,2} = \pm m = \pm \frac{a+b}{2}$$

$$z^2 = \frac{n^2}{m^2} \Rightarrow z_{3,4} = \pm \frac{n}{m} = \pm \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

که با قراردادن مقادیر z در معادله (۱) جوابهای معادله بدست می آید

$$x_1 = 0, \quad x_2 = a+b \quad \text{جواب :}$$

$$x_3 = \frac{a^2 + b^2}{a+b}, \quad x_4 = \frac{2ab}{a+b}$$

۲۲۳. وقتی که يك معادله جبری با ضرایب حقیقی ریشه‌ای مساوی i داشته باشد ، ریشه ای هم مساوی $-i$ دارد ، بنابراین معادله مفروض بسادگی بصورت زیر درمی آید :

$$(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$x_{3,4} = 1 \pm i, \quad x_{1,2} = \pm i \quad \text{جواب :}$$

۲۲۴. در این معادله مجموع ضرایب توانهای زوج برابر است با مجموع ضرایب توانهای فرد و بنابراین یکی از ریشه های معادله برابر -1 است . پس از تقسیم سمت چپ معادله بر $x+1$ به معادله زیر می رسیم :

$$2x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 6x + 5 = 0$$

که پس از تبدیل بصورت ضرب چنین می شود :

$$(2x^2 + x + 5)(x^2 + x + 1) = 0$$

هیچیک از این دو معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارند و بنابراین تنها ریشه حقیقی معادله مفروض مساوی ۱- است .

۲۲۵. طبق شرط $x_1 = 5i$ یکی از ریشه های معادله است ، بنابراین داریم :

$$(5i)^5 + 25(5i)^3 - 8(5i)^2 + k = 0$$

$$k = -200 \quad \text{و از آنجا :}$$

ولی اگر معادله ریشه $5i$ را قبول داشته باشد ، ریشه $-5i$ را هم قبول دارد و عبارت :

$$x^5 + 25x^3 - 8x^2 - 200$$

بر عبارت $(x + 5i)(x - 5i) = x^2 + 25$ قابل قسمت خواهد بود ، یعنی :

$$x^5 + 25x^3 - 8x^2 - 200 = (x^2 + 25)(x^3 - 8) = 0$$

$$x^2 + 25 = 0 ; x^3 - 8 = 0 \quad \text{و بنابراین :}$$

$$x_{4,5} = \pm 5i , x_{2,3} = -1 \pm i/\sqrt{3} , x_1 = 2 \quad \text{جواب :}$$

۲۲۶. معادله دو مجذوری را بصورت زیر بنویسید و ضرایب توانهای مساوی را در دو طرف ، مساوی قرار دهید :

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

۲۲۷. از این خاصیت استفاده می کنیم که ریشه های يك معادله دو مجذوری دو بدو قرینه یکدیگرند ، یعنی :

$$x_1 = -x_2 , x_3 = -x_4$$

از آنجا نتیجه می شود که :

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 ,$$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0 ,$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2(x_1^2 + x_2^2),$$

از طرف دیگر داریم :

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ab}{a^2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad \text{جواب :}$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = -\frac{2b}{a};$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0,$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = \frac{2(b^2 - 2ac)}{a^2},$$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0.$$

۲۲۸. (۱) در این حالت چهار ریشه معادله دو مجذوری $\pm\sqrt{5}$ و $\pm 3i$ خواهد بود و بنابراین :

$$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + 3i)(x - 3i) = 0$$

$$x^4 + 4x^2 - 45 = 0$$

(۲) از روابط مسئله ۲۲۶ استفاده کنید.

$$x^4 - 42x^2 + 841 = 0 \quad \text{جواب :}$$

۲۲۹. ریشه‌های يك معادله دو مجذوری دو بدو قرینه یکدیگرند. فرض میکنیم همه این ریشه‌ها حقیقی و به تصاعد حسابی باشند :

$$\therefore -x_1 : -x_2 : x_2 : x_1$$

و بنابراین باید داشته باشیم :

$$x_2 - (-x_1) = x_1 - x_2 \Rightarrow 3x_2 = x_1$$

$$9x_2^2 = x_1^2 \quad \text{و یا :}$$

$$x_1^2 x_2^2 = q \text{ و } x_1^2 + x_2^2 = -p. \quad \text{علاوه بر آن داریم :}$$

$$\frac{q}{p^2} = \frac{9}{100} \quad \text{و از آنجا :}$$

جواب : $q = 0.09 p^2$

۲۳۰. می توان از نتیجه مسئله قبل استفاده کرد و جوابها را مستقیماً بدست آورد و می توان بعنوان مسئله مستقلی بطریق زیر حل کرد:

ریشه های معادله را $x_{1,2} = \pm \sqrt{z_1}$ و $x_{3,4} = \pm \sqrt{z_2}$ می گیریم و فرض می کنیم که $z_1 > z_2$ باشد. تصاعد حسابی را باین ترتیب می نویسیم :

$$\sqrt{z_1} : \sqrt{z_2} : -\sqrt{z_2} : -\sqrt{z_1}$$

و بنابراین باید داشته باشیم :

$$\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1} = -2\sqrt{z_2} \Rightarrow 3\sqrt{z_2} = \sqrt{z_1} \Rightarrow 9z_2 = z_1$$

که با استفاده از روابط ویت دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 3k + 2 \\ z_1 \cdot z_2 = k^2 \\ z_1 = 9z_2 \end{cases}$$

جواب : $k_2 = -\frac{6}{19}$ ، $k_1 = 6$

۲۳۱. اگر ریشه های معادله را x_1 ، x_2 و x_3 فرض کنیم ، داریم :

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

و با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مساوی در طرفین معادله به روابط مطلوب می رسیم .

۲۳۲. از روابط مسئله قبل استفاده می کنیم :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b & (2) \\ x_1x_2x_3 = c & (3) \end{cases}$$

(۱) اگر ریشه های این معادله به تصاعد حسابی باشند ، داریم :

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \quad (4)$$

و از روابط (۱) و (۲) و (۳) و (۴) بدست می‌آید :

$$x_1 = \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 - 27ac}}{3a} ; x_2 = -\frac{a}{3} ;$$

$$x_3 = \frac{-a^2 - \sqrt{a^4 - 27ac}}{3a}$$

(۲) اگر ریشه‌ها به تصاعد هندسی باشند ، باید داشته باشیم :

$$x_2 = \sqrt{x_1 x_3} \quad (5)$$

و از روابط (۱) و (۲) و (۳) و (۵) بدست می‌آید :

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt[3]{c} - \sqrt{a^2 - 2a\sqrt[3]{c} - 3\sqrt[3]{c}^2}}{2} ;$$

$$x_2 = -\sqrt[3]{c} ;$$

$$x_3 = \frac{-a + \sqrt[3]{c} + \sqrt{a^2 - 2a\sqrt[3]{c} - 3\sqrt[3]{c}^2}}{2}$$

۲۳۳. جواب :

$$x_{1,2} = \pm(a+b) , x_{3,4} = \pm(a-b)$$

$$x_{5,6} = \pm(a+bi) , x_{7,8} = \pm(a-bi)$$

۲۳۴. داریم :

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1)^2 + 2x^2$$

و چون $2x^2$ و $(x + 1)^2$ نمیتوانند با هم مساوی صفر شوند ، حاصل عبارت همیشه مثبت است و از مساوی صفر قراردادن آن ریشه حقیقی بدست نمی‌آید .

۲۳۵. فرض می‌کنیم $x \leq y$ ، اگر در معادله بجای y بر حسب x قراردهیم

بدست می‌آید :

$$\frac{3}{x^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \leq 3$$

علاوه بر آن $x^2 > 1$ است و بنا بر این $1 < x \leq \sqrt{3}$ می شود و می بینیم که برای x عدد صحیحی بدست نمی آید.

۲۳۸. اگر بجای x مقادیر a ، b یا c قرار دهیم، معادله به اتحاد تبدیل می شود.

* ۲۳۹. اگر x عددی صحیح باشد باید باقیمانده های طرفین تساوی :

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

بر هر عدد صحیح، مقادیری مساوی باشد.

برای عدد صحیح x دو حالت وجود دارد :

(۱) x عددی زوج باشد. در این صورت باقیمانده تمام جملات شامل x بر ۲ برابر صفر است و بنا بر این باقیمانده تقسیم سمت چپ معادله بر ۲ برابر باقیمانده a_0 بر ۲ است، ولی چون $f(0) = a_0$ عددی فرد است باقیمانده a_0 بر ۲ مساوی ۱ می شود. باین ترتیب x نمی تواند عددی زوج باشد.

(۲) x عددی است فرد. اگر $x = 2k + 1$ فرض کنیم، داریم :

$$(2k+1)^n + a_{n-1}(2k+1)^{n-1} + a_{n-2}(2k+1)^{n-2} + \dots + a_1(2k+1) + a_0 = 0$$

و روشن است که باقیمانده سمت چپ تساوی بر عدد ۲ برابر است با باقیمانده مجموع ضرایب بر ۲. از طرف دیگر می دانیم :

$$f(1) = 1 + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0$$

عددی است فرد و بنا بر این باقیمانده مجموع ضرایب بر ۲ مساوی ۱ می شود و x نمی تواند عددی فرد باشد.

یعنی x هیچ عدد صحیحی نیست.

۲۴۰. وقتی که $x > 0$ باشد با بزرگ شدن مقدار x ، سمت چپ معادله بزرگ

می‌شود. بازاء $x = 1/5$ این مقدار منفی و بازاء $x = 1/6$ این مقدار مثبت است. بنابراین ریشه این معادله عددی است درفاصله $(1/5 و 1/6)$.

این ریشه را $x_1 = \frac{p}{q}$ می‌گیریم (p و q را دو عدد صحیح و نسبت بهم اولاند) اگر این مقدار را در معادله قرار دهیم، بدست می‌آید.

$$p^5 + pq^4 = 10q^5$$

از این تساوی نتیجه می‌شود که ۱۰ باید بر p قابل قسمت باشد؛ یعنی p می

تواند تنها یکی از اعداد ۱، ۲، ۵ و ۱۰ باشد. اگر در کسر $\frac{p}{q}$ ، صورت را

مساوی یکی از اعداد ۱، ۲، ۵ یا ۱۰ بگیریم برای q نمی‌توان عددی صحیح

پیدا کرد که در شرط $1/5 < \frac{p}{q} < 1/6$ صدق کند.*

و باین ترتیب ریشه‌های این معادله اعدادی گنگ هستند.

۲۴۱. معادله را بترتیب چنین می‌نویسیم:

$$2x^n - (x^n + na x^{n-1} + \dots + a^n) = 0$$

$$2x^n - (x - a)^n = 0$$

$$2 - \left(1 - \frac{a}{x}\right)^n = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt[n]{2} - 1}$$

(*) زیرا اگر فرض کنیم $10 = a \cdot p$ (عدد a صحیح) و طرفین را بطة $p^5 + pq^4 = apq^5$ تقسیم کنیم به رابطه $p^4 + q^4 = aq^5$ میرسیم که میتوان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^4 + 1 = a \cdot q$$

سمت راست تساوی عددی است صحیح، درحالیکه سمت چپ تساوی عددی کسری و این غیر ممکن است (مترجم)

$$\frac{x^2}{\left(\frac{x}{x+1}\right)} = 110 \quad \text{۲۴۲. راهنمایی:}$$

جواب : $x=10$

۲۴۳. اگر بجای x مقادیر متوالی $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ را قرار دهیم می بینیم که بازاء $x=1, x=\pm 1, y=\pm 3$ و بازاء $x=3, x=\pm 3, y=\pm 1$ می شود و اعداد $2, 4, 5, 6, \dots$ در معادله صدق نمی کنند . بسادگی ثابت می شود که این معادله بازاء مقادیر $x \geq 4$ دارای جواب نیست . در حقیقت مجموع :

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + x!$$

بازاء $x \geq 4$ به رقم ۳ ختم می شود ، در حالیکه هیچ مجذور کاملی به ۳ ختم نمی شود . بنابراین معادله جواب دیگری ندارد .

۲۴۴. $y = px$ فرض می کنیم ، در این صورت :

$$(x^p)^x = (px)^x \Rightarrow x^{p-1} = p$$

و بنابراین :

$$x = p^{\frac{1}{p-1}} ; y = p^{\frac{p}{p-1}}$$

با تبدیل $\frac{1}{p-1} = k$ مقادیر مجهول بدست می آید .

$$y = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} , x = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \quad \text{جواب:}$$

§ ۵- معادلات گنگ

۲۴۵. حل این معادله وقتی ساده می شود که زیر رادیکالها را به صورت ضرب

تبدیل کنیم و عامل مشترک آنها را به فاکتور بگذاریم ، یعنی :

$$\sqrt{x+1} (\sqrt{4x+5} - \sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1}) = 0$$

$$\sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

و از صفر قرار دادن عامل دوم داریم :

$$\sqrt{4x+5} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1}$$

که پس از گویا کردن بصورت زیر درمی آید :

$$7x^2 - 26x - 45 = 0$$

و از آنجا $x_2 = 5$ بدست می آید $(x_2 = -\frac{9}{7})$ ریشه خارجی معادله است .

جواب : $x_1 = -1$ و $x_2 = 5$

۲۴۶. اگر $x^2 + 5x + 28 = z^2$ بگیریم ، معادله مفروض باین صورت درمی آید :

$$z^2 - 5z - 28 = 0$$

و از آنجا : $z_1 = 8$ ($z_2 = -3$)

و بنابراین : $x^2 + 5x - 26 = 0$

جواب : $x_1 = 4$ ، $x_2 = -9$.

۲۴۷. راهنمایی : $3x^2 + 5x + 8 = z$ فرض کنید .

جواب : $x_1 = 1$ ، $x_2 = -\frac{1}{3}$

۲۴۸. مخرج کسر سمت چپ معادله را گویا می کنیم :

$$\frac{21 + \sqrt{441 - x^2}}{x} = \frac{21}{x} \Rightarrow \sqrt{441 - x^2} = 0$$

جواب : $x_{1,2} = \pm 21$

۲۴۹. اگر فرض کنیم $2x - 5 = z^2$ ، معادله بصورت زیر درمی آید ،

$$\sqrt{z^2 + 2z + 1} + \sqrt{z^2 + 6z + 9} = 14$$

جواب $x=15$

۲۵۰. پس از ساده کردن به معادله درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$x^2 + 31x - 222 = 0$$

وازنجا : $x_1 = 6 ; x_2 = -37$

۲۵۱. جواب : $x=2$

۲۵۲. داریم:

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2 = 0$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}} \left(\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) = 0$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

وازنجا :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 1$$

که پس از تبدیلات ساده چنین می‌شود :

$$(x^2 - x) - 2\sqrt{x^2 - x} + 1 = 0$$

$$(\sqrt{x^2 - x} - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

یعنی :

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_1 = 1$$

جواب :

۲۵۳. داریم :

$$\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} = x^2 - \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}}$$

$$(x^2 - 12) - 2x\sqrt{x^2 - 12} + x^2 = 0$$

$$(\sqrt{x^4 - 12} - x)^2 = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$$

از حل این معادله دو مجذوری دوجواب حقیقی و دوجواب موهومی بدست می آید .

$$x = \pm 2 : \text{جواب}$$

$$۲۵۴. \text{ راهنمایی : } x^2 - 3x + 7 = z^2 \text{ فرض کنید .}$$

$$\text{جواب : } x_1 = -3, x_2 = 6, x_{۳,۴} = \frac{3(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

$$۲۵۵. \text{ داریم :}$$

$$\frac{\sqrt{(a+x)(b+x)}(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}} = \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{(x+a)(x+b)} = \sqrt{ab} \quad \text{واز آنجا :}$$

$$x^2 + (a+b)x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -(a+b)$$

$$\text{جواب : } (b > 0, a > 0) x_1 = 0, (b < 0, a < 0) x_2 = -(a+b)$$

$$۲۵۶. \text{ داریم :}$$

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = -\sqrt[3]{x+3}$$

با استفاده از رابطه :

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

بدست می آوریم :

$$x+1+x+2+3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)}(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2}) = - (x+3)$$

که پس از تبدیلات ساده چنین می شود :

$$\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)} = x+2$$

یعنی :

$$(x+1)(x+2)(x+3) = (x+2)^3$$

وازا آنجا : $x = -2$

۲۵۷. اگر $\sqrt[3]{x} = z$ فرض کنیم ، معادله بصورت زیر درمی آید :

$$2z^2 - 5z - 3 = 0 \Rightarrow z_1 = 3, z_2 = -\frac{1}{2}$$

جواب : $x_2 = -\frac{1}{8}, x_1 = 27$

۲۵۸. اگر فرض کنیم $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = z$ ، معادله مفروض بصورت زیر

درمی آید:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{13}{6} \Rightarrow 6z^2 - 13z + 6 = 0$$

$$z_1 = \frac{2}{3}, z_2 = \frac{3}{2},$$

و بنابراین :

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = \frac{2}{3}; \sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = \frac{3}{2}$$

جواب . $x_2 = -\frac{20}{127}, x_1 = 5$

۲۵۹. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} = z$ می گیریم ، در اینصورت بعد از آنکه سمت راست

معادله را به $1+a$ کوچک کنیم ، معادله چنین می شود :

$$\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{z} + z = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{4}}$$

و یا : $z^2 - 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot z + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

$$z = \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{واز آنجا :}$$

واگر بجای z مقدارش را قرار دهیم ، بدست می آید :

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = \frac{1-a}{1+a}$$

جواب : $x = -a$

۲۶۰. اگر مخرج کسر را درست چپ تساوی گویا کنیم ، چنین می شود :

$$\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{225x}}$$

$$1-x^2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{225x^4}} \right)^2 \quad \text{و یا :}$$

اگر برای سهولت کار فرض کنیم : $x^2 = z^2$ خواهیم داشت :

$$1-z^2 = \left(1 - \frac{z^2}{\sqrt[4]{225}} \right)^2$$

$$15\sqrt[4]{15}z^4 + 64z^2 - 16\sqrt[4]{225}z^2 = 0 \quad \text{و یا :}$$

و در نتیجه :

(۱) اگر $z^2 = 0$ باشد $z = 0$ و $x_1 = 0$ می شود .

(۲) اگر داشته باشیم : $15\sqrt[4]{15}z^2 + 64z - 16\sqrt[4]{225} = 0$

$$z = \frac{-32 \pm 68}{15\sqrt[4]{15}} \quad \text{بدست می آید :}$$

و چون z^2 یعنی x^2 باید مثبت باشد ، تنها جواب مثبت را در نظر می گیریم

$$z = \frac{12}{5\sqrt[4]{15}}$$

واز آنجا :

$$x^2 = \frac{12^3}{5^3 \times 15} = \frac{24^2}{25^2}$$

جواب : $x_{1,2} = \pm \frac{24}{25}$ و $x_1 = 0$

۲۶۱. جواب : $x_{1,2} = \pm 3$

۲۶۲. جواب : $x = 1\frac{1}{16}$

۲۶۳. جواب : $x_1 = \frac{1}{2}$ ، $x_2 = 5$

۲۶۴. جواب : $x = \frac{3}{4}$

۲۶۵. جواب : $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$

۲۶۶. جواب : $x_{1,2} = \pm a$

۲۶۷. جواب : $x_{1,2} = \pm 8$

۲۶۸. صورت و مخرج کسر را در مجذور مخرج ضرب می کنیم ، چنین خواهیم داشت :

$$\frac{(a-b)^2}{(\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b})^2} = a-b$$

و یا :

$$a-x+x-b+\sqrt[3]{(a-x)(x-b)(a-b)} = a-b$$

$$\sqrt[3]{a-b} \cdot \sqrt[3]{(a-x)(x-b)} = 0$$

یعنی

جواب : $x_1 = b$ ، $x_2 = a$

۲۶۹. جواب : $x_1 = 64$ ، $x_2 = -27$

۲۷۰. اگر فرض کنیم : $a-x=t^4$ و $b-x=z^4$ ، خواهیم داشت :

$$a+b-2x=t^4+z^4$$

و معادله مفروض باین صورت درمی آید :

$$t+z=\sqrt[4]{t^4+z^4}$$

که پس از گویا کردن معادله، خواهیم داشت:

$$tz(2t^2+3tz+2z^2)=0$$

یعنی:

$$t=0 \Rightarrow x_1=a \quad \text{یا:}$$

$$z=0 \Rightarrow x_1=b \quad \text{یا:}$$

$$2t^2+3tz+2z^2=0 \quad \text{و یا:}$$

معادله اخیر را می‌توان باینصورت نوشت:

$$2(t^2+z^2)=-3tz$$

$$4(t^4+z^4)=t^2z^2 \quad \text{یا:}$$

$$4(a+b-2x)=\sqrt{(a-x)(b-x)} \quad \text{یعنی:}$$

و از آنجا دو جواب موهومی بدست می‌آید.

$$x=b \quad \text{اگر } a \geq b \quad \text{جواب:}$$

$$x=a \quad \text{و اگر } b \geq a$$

۲۷۱. معادله را می‌توان باینصورت نوشت:

$$\sqrt[5]{a+x}(\sqrt[5]{b}+\sqrt[5]{a})=\sqrt[5]{x}$$

$$(a+x)(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b})^5=x \quad \text{و یا:}$$

$$x=\frac{a(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b})^5}{1-(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b})^5} \quad \text{جواب:}$$

۲۷۲. سمت چپ معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$x\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\dots=x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \dots =$$

$$=x \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

در اینجا توان x عبارتست از مجموع بی نهایت جمله يك تصاعد هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ و بنابراین اگر مجموع n جمله این تصاعد را S_n بگیریم، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

و بنابراین معادله بصورت $x^2 = 4$ در می آید که تنها جواب مثبت آن قابل قبول است.

جواب: $x = 2$.

۲۷۳. جواب: $x_{1,2} = \pm \sqrt{ab}$ ، $x_3 = 0$.

۲۷۴. اگر طرفین معادله را در $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$ ضرب کنیم، بدست می آید:

$$a+x+a-x = \sqrt{a^2} (\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})$$

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \frac{2a}{\sqrt{a^2}} = 2\sqrt{a} \quad ; \quad \text{یعنی:}$$

$$2a + 2\sqrt{a^2 - x^2} (\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}) = 4a \quad ;$$

$$2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot 2\sqrt{a} = 2a \quad ;$$

$$a^2 - x^2 = a^2 \Rightarrow x = 0$$

۲۷۵. راهنمایی: $\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}} = z$ فرض کنید.

جواب: $x = \frac{a-b}{2}$

۲۷۶. سمت چپ معادله را تبدیل می کنیم. از جمله اول $x^{\frac{n}{n+1}}$ و از جمله

دوم $a^{\frac{n}{n+1}}$ را بیرون رادیکال می آوریم ، بدست می آید :

$$x^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}} + a^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n]{a^{\frac{n}{n+1}} + x^{\frac{n}{n+1}}} = b ;$$

$$\left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}} = b ; \quad \text{و یا :}$$

$$x^{\frac{n}{n+1}} = b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}} \quad \text{و از آنجا :}$$

$$x = \left(b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad \text{جواب :}$$

۲۷۷. معادله مفروض را بصورت زیر می نویسیم :

$$\sqrt[n]{a+x} \left(\frac{x+a}{ax} \right) = \frac{\sqrt[n]{x}}{a} ;$$

$$\sqrt[n]{\frac{a+x}{x}} \cdot \frac{x+a}{x} = \frac{a}{b} ; \quad \text{یا :}$$

$$\left(\frac{a+x}{x} \right)^{\frac{1}{n}+1} = \frac{a}{b} ;$$

$$\left(\frac{a+x}{x} \right)^{n+1} = \left(\frac{a}{b} \right)^n \quad \text{یعنی :}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b} \right)^n - 1}} \quad \text{جواب :}$$

$$۲۷۸. \text{ جواب : } x_1 = ۰ , x_2 = ۳$$

§ ۶. دستگاه معادلات از درجات بالاتر

۲۷۹. دستگاه مفروض را بصورت زیر می نویسیم :

$$\begin{cases} (x+y)+xy=11 \\ (x+y)xy=30 \end{cases}$$

و فرض می کنیم : $xy=v$ ، $x+y=u$

$$\begin{cases} u+v=11 \\ u.v=30 \end{cases} \quad \text{بنابراین :}$$

$$\begin{cases} u_1=6 \\ v_1=5 \end{cases} ; \begin{cases} u_2=5 \\ v_2=6 \end{cases} \quad \text{از آنجا :}$$

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x.y=5 \end{cases} ; \begin{cases} x+y=5 \\ x.y=6 \end{cases} \quad \text{یعنی :}$$

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=3 \end{cases} , \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=2 \end{cases} ; \begin{cases} x_3=1 \\ y_3=5 \end{cases} ; \begin{cases} x_4=5 \\ y_4=1 \end{cases} \quad \text{جواب :}$$

$$\begin{cases} x_{r,r} = \frac{-5 \pm i\sqrt{22}}{2} \\ y_{r,r} = \frac{-5 \mp i\sqrt{22}}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=1 \end{cases} ; \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=3 \end{cases} \quad \text{۲۸۰. جواب :}$$

$$\begin{cases} x_{r,r} = \pm \frac{1}{r} \\ y_{r,r} = \pm 1 \end{cases} ; \begin{cases} x_{1,r} = \pm \frac{r}{2} \\ y_{1,r} = \pm \frac{1}{r} \end{cases} \quad \text{۲۸۱. جواب :}$$

۲۸۲. اگر $x^2 - y^2 = u$ و $-xy = v$ فرض کنیم ، دستگاه مفروض بصورت زیر درمی آید :

$$\begin{cases} u + v = -۱۱ \\ u \cdot v = -۱۸۰ \end{cases}$$

$$\text{واز آنجا : } \begin{cases} u_1 = ۹ \\ v_1 = -۲۰ \end{cases} ; \begin{cases} u_2 = -۲۰ \\ v_2 = ۹ \end{cases}$$

$$\text{یعنی : } \begin{cases} x^2 - y^2 = ۹ \\ x \cdot y = ۲۰ \end{cases} ; \begin{cases} x^2 - y^2 = -۲۰ \\ x \cdot y = -۹ \end{cases}$$

که باحل این دودستگاه جوابها بدست می آیند :

$$\text{جواب : } \begin{cases} x_{۲,۴} = \pm ۴i \\ y_{۲,۴} = \pm ۵i \end{cases} ; \begin{cases} x_{۱,۲} = \pm ۵ \\ y_{۱,۲} = \pm ۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{۷,۸} \neq \pm ۴/۸۵i \\ y_{۷,۸} \neq \pm ۱/۸۶i \end{cases} ; \begin{cases} x_{۵,۶} \neq \pm ۱/۸۶ \\ y_{۵,۶} \neq \pm ۴/۸۵ \end{cases}$$

۲۸۳. از معادله دوم دستگاه y را محاسبه و در معادله اول قرار می دهیم ، در اینصورت معادله درجه دومی نسبت به x بدست می آید که تنها وقتی دارای دوریشه مساوی است که مبین آن مساوی صفر باشد ، یعنی :

$$(۸m - ۶m^2)^2 - ۴(۱ + m^2)(۹m^2 - ۲۴m - ۹) = ۰$$

$$\text{واز آنجا : } m = -۰/۷۵$$

$$\text{۲۸۴. جواب : } \begin{cases} x_1 = ۱ \\ y_1 = ۴ \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = ۴ \\ y_2 = ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{۲,۴} = \frac{-۷ \pm i\sqrt{۱۵}}{۲} \\ y_{۲,۴} = \frac{-۷ \pm i\sqrt{۱۵}}{۲} \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_{3,4} = \pm 12 \\ y_{3,4} = \pm \frac{7}{2} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_{1,2} = \pm 3 \\ y_{1,2} = \pm 1 \end{array} \right| \quad : \text{جواب : ۲۸۵}$$

۲۸۶. راهنمایی : فرض کنید :

$$x(x+1)=u ; 3x^2+\Delta y=v$$

در اینصورت دستگاه بصورت زیر در می آید :

$$\begin{cases} uv=144 \\ u+v=24 \end{cases}$$

۲۸۷. راهنمایی : طرفین معادله اول را سه برابر کنید و با معادله دوم جمع کنید .

جواب : ریشه های حقیقی دستگاه چنین است :

$$\left| \begin{array}{l} x_1=2 \\ y_1=3 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_2=3 \\ y_2=2 \end{array} \right|$$

۲۸۸. سمت چپ هر يك از معادلات را بضرب تبدیل می کنیم ، بدست می آید :

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-19)=0 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-7)=0 \end{cases}$$

اگر $x-y=0$ باشد $x=y$ و اگر $x+y=0$ باشد $x=-y$ می شود علاوه بر آن :

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=19 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases} \quad (1)$$

اگر $x=y$ باشد از معادله دوم دستگاه خواهیم داشت :

$$2x^2-14x=0 ;$$

$$\left| \begin{array}{l} x_{2,3} = \pm \sqrt{7} \\ y_{2,3} = \pm \sqrt{7} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1=0 \\ y_1=0 \end{array} \right| \quad : \text{وازا آنجا :}$$

اگر $y = -x$ باشد، از معادله اول دستگاه داریم :

$$2x^2 - 38x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{4,5} = \pm \sqrt{19} \\ y_{4,5} = \mp \sqrt{19} \end{cases}$$

از دستگاه معادلات (۱) هم می‌توان به دستگاه زیر رسید :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$$

که از حل آن بقیه جوابهای دستگاه بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x_{8,9} = \pm 2 \\ y_{8,9} = \pm 3 \end{cases} : \begin{cases} x_{6,7} = \pm 3 \\ y_{6,7} = \pm 2 \end{cases}$$

۲۸۹. معادلات دستگاه را می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{cases} (x + \frac{1}{x} + 2)(y + \frac{1}{y} + 2) = 27 \\ (x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y}) = 10 \end{cases}$$

که اگر فرض کنیم : $x + \frac{1}{x} = u$ و $y + \frac{1}{y} = v$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} (u + 2)(v + 2) = 27 \\ u \cdot v = 10 \end{cases}$$

$$: \begin{cases} x_{2,4} = \frac{1}{2} \\ x_{2,4} = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases} ; \begin{cases} x_{1,3} = 2 \\ y_{1,3} = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

جواب :

$$\begin{cases} x_{7,8} = 2 \pm \sqrt{3} \\ y_{7,8} = \frac{1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x_{5,6} = 2 \pm \sqrt{3} \\ x_{5,6} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{2,4} = 2 \pm \sqrt{3} \\ y_{2,4} = 7 + 4\sqrt{3} \end{cases} ; \begin{cases} x_{1,2} = 7 + 4\sqrt{3} \\ y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases} \quad : \text{جواب : ۲۹۰}$$

$$\begin{cases} x_{7,8} = 2 \pm \sqrt{3} \\ y_{7,8} = 7 - 4\sqrt{3} \end{cases} ; \begin{cases} x_{5,6} = 7 - 4\sqrt{3} \\ x_{5,6} = 2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

۲۹۱. معادله را می توان بصورت زیر درآورد :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 y^2 = 16 \end{cases}$$

جواب : $y_{1,2} = \pm 2$ ، $x_{1,2} = \pm 2$

$$\begin{cases} x_2 = 11 \\ y_2 = 9 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = -9 \\ y_1 = -11 \end{cases} \quad : \text{جواب : ۲۹۲}$$

$$\begin{cases} x_2 = 11 \\ y_2 = -14 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = 14 \\ y_1 = -11 \end{cases} \quad : \text{جواب : ۲۹۳}$$

۲۹۴. معادله اول دستگاه را چنین می نویسیم :

$$(x^2 + y^2)^2 - x^2 y^2 = 481$$

یا :

$$(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) = 481$$

که با در نظر گرفتن معادله دوم دستگاه خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 13 \\ x^2 + y^2 + xy = 37 \end{cases}$$

از آنجا $xy = 12$ بدست می آید که با اضافه کردن آن به معادله دوم خواهیم

داشت :

$$(x + y)^2 = 49 \quad (۱)$$

و با کم کردن آن از معادله اول :

$$(x - y)^2 = 1 \quad (2)$$

باین ترتیب دستگاه معادلات مفروض به چهار دستگاه زیر تجزیه می شود :

$$\begin{cases} x + y = \pm 1 \\ x - y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\left| \begin{matrix} x_{1,2} = \pm 3 \\ y_{1,2} = \pm 4 \end{matrix} \right| ; \left| \begin{matrix} x_{1,2} = \pm 4 \\ y_{1,2} = \pm 3 \end{matrix} \right| \quad \text{جواب :}$$

۲۹۵. $x - y = z$ فرض می کنیم و آنرا با معادله دوم دستگاه حل می کنیم ، بدست می آید :

$$x = \frac{a+z}{2} ; y = \frac{a-z}{2} . \quad (1)$$

اگر این مقادیر را در معادله اول قرار دهیم ، داریم :

$$(a+z)^2 + (a-z)^2 = 16b^2$$

که پس از ساده کردن به معادله دوم جذوری زیر می رسم :

$$z^2 + 6a^2z^2 + (a^4 - 8b^4) = 0 \quad (2)$$

اگر $z^2 = v$ فرض کنیم ، داریم :

$$v^2 + 6a^2v + (a^4 - 8b^4) = 0 \quad (3)$$

اگر مقدار ثابت این معادله $a^4 - 8b^4 > 0$ باشد ، دستگاه مفروض ریشه حقیقی ندارد .

اگر $a^4 - 8b^4 < 0$ باشد ، معادله (۳) يك ریشه مثبت دارد .

$$v_1 = -3a^2 + \sqrt{8(a^4 + b^4)}$$

$$z_2 = -\sqrt{v_1} , z_1 = \sqrt{v_1} \quad \text{و بنا براین :}$$

که اگر این مقادیر را در معادله (۱) قرار دهیم ، ریشه های حقیقی دستگاه بدست می آید :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{a + \sqrt{v_1}}{2} \\ y_1 = \frac{a - \sqrt{v_1}}{2} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{a - \sqrt{v_1}}{2} \\ y_1 = \frac{a + \sqrt{v_1}}{2} \end{array} \right|$$

$$; \left| \begin{array}{l} x_1 = a \\ x_1 = 0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = a \end{array} \right| \quad ۲۹۶. \text{ جواب :}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_{r,r} = \frac{(1 \pm i\sqrt{r})a}{2} \\ y_{r,r} = \frac{(1 \mp i\sqrt{r})a}{2} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} x_{r,r} = \frac{b}{r} \pm B \\ y_{r,r} = \frac{b}{r} \mp B \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_{1,r} = \frac{b}{r} \pm A \\ y_{1,r} = \frac{b}{r} \mp A \end{array} \right| \quad ۲۹۷. \text{ جواب :}$$

که در آن داریم :

$$A = \sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{1}{2\sqrt{\delta}}} \sqrt{b^2 + \frac{4a^{\delta}}{b}};$$

$$B = \sqrt{-\frac{b^2}{4} + \frac{1}{2\sqrt{\delta}}} \sqrt{b^2 + \frac{4a^{\delta}}{b}}$$

۲۹۸. راهنمایی : دستگاه معادلات را بصورت زیر می نویسیم :

$$\begin{cases} x+y = \sqrt{xy} + 7 \\ (x+y)\sqrt{xy} = 78 \end{cases}$$

در این صورت بدست می آید :

$$\begin{cases} xy=۳۶ \\ x+y=۱۳ \end{cases}; \begin{cases} xy=۱۶۹ \\ x+y=-۶ \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_2=۹ \\ y_2=۴ \end{array} \right|; \left| \begin{array}{l} x_1=۴ \\ y_1=۹ \end{array} \right| \quad \text{جواب :}$$

۲۹۹. طرفین معادله اول دستگاه را مکعب می کنیم :

$$x+y+3\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=4^3$$

$$x+y+3\sqrt{۳۶} \times ۴=4^3 \quad \text{یا :}$$

در نتیجه به دستگاه ساده زیر می رسم :

$$\begin{cases} x+y=۲۸ \\ x \cdot y=۲۷ \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_2=۱ \\ y_2=۲۷ \end{array} \right|; \left| \begin{array}{l} x_1=۲۷ \\ y_1=۱ \end{array} \right| \quad \text{جواب :}$$

۳۰۰. اگر فرض کنیم $\sqrt{\frac{x+y}{\Delta x}}=t$ ، معادله اول دستگاه چنین می شود :

$$t+\frac{1}{t}=\frac{۳۴}{۱۵};$$

$$۱۵t^2-۳۴t+۱۵=0 \quad \text{یا :}$$

$$t_2=\frac{\Delta}{۳} \text{ و } t_1=\frac{۲}{\Delta} \quad \text{وازا نجا :}$$

و بنا بر این داریم :

$$\frac{x+y}{\Delta x}=\frac{۹}{۲۵} \Rightarrow y=\frac{۴}{\Delta}x$$

$$\frac{x+y}{\Delta x}=\frac{۲۵}{۹} \Rightarrow y=\frac{۱۱۶}{۹}x$$

اگر این مقادیر y را در معادله دوم دستگاه قرار دهیم ، دو معادله درجه دوم بدست می آید :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = -\frac{29}{4} \\ y_1 = -\frac{29}{5} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = 5 \\ y_1 = 4 \end{array} \right| \quad \text{جواب :}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_{2,4} = \frac{-125 \pm \sqrt{136729}}{232} \\ y_{2,4} = \frac{-125 \pm \sqrt{136729}}{18} \end{array} \right|$$

۳۰۱. جواب : $x_1 = 5$ ، $y_1 = 7$

۳۰۲. شبیه مسئله ۳۰۰ حل می شود .

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ y_1 = -\frac{3}{2} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = 6 \\ y_1 = 3 \end{array} \right| \quad \text{جواب :}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_{2,4} = \frac{12 \pm 3\sqrt{29}}{23} \\ y_{2,4} = 12 \mp 3\sqrt{29} \end{array} \right|$$

۳۰۳. $\sqrt[6]{xy} = z$ می گیریم ، در این صورت معادله اول دستگاه بصورت زیر درمی آید :

$$3z^3 - 7z^2 + 4 = 0 ;$$

$$(z-1)(3z^2 - 4z - 4) = 0$$

$$z_1 = 1 , z_2 = 2 , z_3 = -\frac{2}{3} \quad \text{وازا نجا :}$$

$$\text{جواب : } \left| \begin{array}{l} x_7 = 16 \\ y_7 = 4 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_{1,2} = 10 \pm 3\sqrt{11} \\ y_{1,2} = 10 \mp 3\sqrt{11} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} x_{5,6} = 10 \pm \frac{2\sqrt{18209}}{27} \\ y_{5,6} = 10 \mp \frac{2\sqrt{18209}}{27} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_4 = 4 \\ y_4 = 16 \end{array} \right|$$

۳۰۴. با استفاده از خواص نسبت‌های مساوی، معادله اول دستگاه را میتوان چنین نوشت :

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{25}{7} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{4}x$$

و بنابراین باید دستگاه‌های زیر را حل کرد :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2y^2 = 118 \\ y = \frac{3}{4}x \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2y^2 = 118 \\ y = -\frac{3}{4}x \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x_7 = 4\sqrt[3]{\frac{59}{5}} \\ y_7 = -3\sqrt[3]{\frac{59}{5}} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \end{array} \right| \quad \text{جواب :}$$

۳۰۵. فرض می‌کنیم : $3x = 2y = z = 6k$ ، در این صورت داریم :

$$x = 2k ; y = 3k ; z = 6k$$

مقادیر x و y و z بر حسب k را در معادله دوم دستگاه قرار می‌دهیم، بدست می‌آید :

$$49k^2 = 196 \Rightarrow k = \pm 2$$

$$\text{جواب : } x_{1,2} = \pm 4, y_{1,2} = \pm 6, z_{1,2} = \pm 12$$

۳۵۶. راهنمایی : دو معادله آخر را چنین بنویسید :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$$

جواب : $z_{1,2} = \pm 5$; $y_{1,2} = \pm 4$, $x_{1,2} = \pm 3$

۳۵۷. از معادلات دوم و سوم دستگاه بدست می آید :

$$xyz = 27 \quad (1)$$

حال اگر طرفین معادله سوم را در z ضرب کنیم و سپس بجای xyz مقدارش را از (۱) و بجای $x+y$ مقدارش $9-z$ را از معادله اول قرار دهیم ، پس از ساده کردن به معادله $(z-3)^2 = 0$ می رسیم که از آنجا $z = 3$ بدست می آید.

جواب : $x = y = z = 3$

۳۵۸. معادله دوم دستگاه با در نظر گرفتن معادله سوم بصورت زیر در می آید :

$$xy + yz + xz = \frac{13}{3} ;$$

$$x(y+z) + yz = \frac{13}{3} \quad \text{و یا :}$$

از طرف دیگر داریم :

$$y+z = \frac{13}{3} - x ; yz = \frac{1}{x}$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$x\left(\frac{13}{3} - x\right) + \frac{1}{x} = \frac{13}{3} ;$$

$$(x-1)\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right) = 0 \quad \text{یعنی :}$$

$$x_3 = \frac{1}{3} , x_2 = 3 , x_1 = 1 \quad \text{و از آنجا :}$$

و دیگر بسادگی y و z بدست می آید .

$$; \begin{cases} x_7 = 3 \\ y_7 = 1 \\ z_7 = \frac{1}{3} \end{cases} ; \begin{cases} x_7 = 1 \\ y_7 = \frac{1}{3} \\ z_7 = 3 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \\ z_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{جواب :}$$

$$\begin{cases} y_6 = \frac{1}{3} \\ y_6 = 1 \\ z_6 = 3 \end{cases} ; \begin{cases} x_5 = \frac{1}{3} \\ y_5 = 3 \\ z_5 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x_4 = 3 \\ y_4 = \frac{1}{3} \\ z_4 = 1 \end{cases}$$

۳۰۹. از سه نسبت مساوی اول نسبت جدیدی می‌سازیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{x}{y+z} = \frac{x+y+z}{y+z+x+z+1+x+y-1}$$

واز آنجا :

$$\frac{x}{y+z} = \frac{1}{2} \Rightarrow y+z = 2x$$

وبنا براین :

$$x+y+z = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \frac{1}{2}$$

$$z = -\frac{1}{6}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{6} \quad \text{جواب :}$$

۳۱۰. از جمع سه معادله دستگاه داریم :

$$(x+y+z)^2 = a+b+c$$

$$x+y+z = \pm \sqrt{a+b+c} \quad \text{واز آنجا :}$$

که اگر این مقدار را در هر یک از معادلات دستگاه قرار دهیم جوابهای x و y و z بدست می‌آید .

$$z = \pm \frac{c}{k} ; \quad y = \pm \frac{b}{k} ; \quad x = \pm \frac{a}{k} \quad \text{جواب :}$$

$$(k = \sqrt{a+b+c})$$

۳۱۱. فرض می‌کنیم :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = k ; \quad (۱)$$

در این صورت داریم :

$$x = \frac{k}{a} ; \quad y = \frac{k}{b} ; \quad z = \frac{k}{c}$$

و بنابراین :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a+b+c}{k} \quad (۲)$$

روابط (۱) و (۲) مقدار k را به ما می‌دهند :

$$k = \pm \sqrt{a+b+c}$$

$$: y = \pm \frac{\sqrt{a+b+c}}{b} ; \quad x = \pm \frac{\sqrt{a+b+c}}{a} \quad \text{جواب :}$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{a+b+c}}{c}$$

۳۱۲. داریم :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad \text{و از آنجا :}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad \text{و بنابراین :}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$y = \frac{2abc}{ab+bc-ac} ; x = \frac{2abc}{bc+ac-ab} \quad \text{جواب :}$$

$$z = \frac{2abc}{ac+ab-bc}$$

$$. ۳۱۳ \quad \text{جواب : } x=5 ; y=1 ; z=3$$

$$. ۳۱۴ \quad \text{جواب : } x_1=y_1=z_1=0$$

$$z_{2,3} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4} ; y_{2,3} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} ; x_{2,3} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۳۱۵. معادله دوم را از معادله اول و معادله سوم را از معادله دوم کم می کنیم ، بدست می آید :

$$(y-z)(x+y+z)=9 ;$$

$$(x-y)(x+y+z)=9 ;$$

و از آنجا :

$$y-z=x-y ; 2y=x+z$$

و بنابراین :

$$(x-y)y=3 ; x=\frac{3}{y}+y$$

و اگر بجای x مقدارش $x=\frac{3}{y}+y$ را در معادله اول قرار دهیم ، به معادله

دوم جذوری زیر می رسیم :

$$3y^4 - 28y^2 + 9 = 0$$

و از آنجا :

$$y_{1,2} = \pm 3 ; y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_{۳,۴} = \pm \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳} \\ y_{۳,۴} = \pm \frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ z_{۳,۴} = \pm \frac{۸\sqrt{۳}}{۳} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_{۱,۲} = ۴ \\ y_{۱,۲} = \pm ۲ \\ z_{۱,۲} = \pm ۲ \end{array} \right| \quad \text{جواب :}$$

۳۱۶. داریم :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = a^2 + b^2 + c^2 ;$$

$$x + y + z = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{N} \quad \text{یعنی :}$$

سمت چپ هریک از معادلات را به صورت ضرب دو عبارت مزدوج تبدیل میکنیم

و بجای $x + y + z$ مقدارش $\frac{1}{N}$ را قرار می دهیم ، بدست می آید :

$$y + z - x = a^2 N$$

$$x + z - y = b^2 N$$

$$x + y - z = c^2 N$$

واز حل این دستگاه خطی ، مجهولات بدست می آید .

$$x = \pm \frac{b^2 + c^2}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{جواب :}$$

$$y = \pm \frac{a^2 + c^2}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$z = \pm \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

۳۱۷. اگر هر سه معادله را باهم جمع کنیم ، بدست می آید :

$$2(x + y + z)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$x + y + z = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}} \quad \text{واز آنجا :}$$

حالا معادلات دوم و سوم را با هم جمع و معادله اول را از آن کم می کنیم، میشود:

$$2x(x+y+z) = b+c-a$$

و از آنجا :

$$x = \frac{b+c-a}{2(x+y+z)} = \pm \frac{b+c-a}{\sqrt{2(a+b+c)}}$$

همین ترتیب سایر مجهولات هم بدست می آید .

$$y = \pm \frac{a+c-b}{\sqrt{2(a+b+c)}} ; x = \pm \frac{b+c-a}{\sqrt{2(a+b+c)}} \quad \text{جواب :}$$

$$z = \pm \frac{a+b-c}{\sqrt{2(a+b+c)}}$$

۳۱۸. از جمع معادلات بدست می آید :

$$xy+xz+yz = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

و اگر بترتیب هریک از سه معادله را از رابطه اخیر کم کنیم ، بدست می آید:

$$yz = \frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2) ;$$

$$xz = \frac{1}{4}(a^2+c^2-b^2) ;$$

$$xy = \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2) .$$

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2} \quad \text{و بنابراین :}$$

دو معادله اخیر مقادیر x و y را بدست می دهند و سپس z بدست می آید .

$$x = \pm \sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{2(b^2+c^2-a^2)}} \quad \text{جواب :}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2(a^2 + c^2 - b^2)}}$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2(a^2 + b^2 - c^2)}}$$

۳۱۹. دستگاه معادلات را بصورت زیر می نویسیم :

$$\begin{cases} \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x} + 5 \cdot \frac{1}{y} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z} = \frac{13}{3} ; \\ 3 \cdot \frac{1}{z} - 4 \cdot \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{1}{z} + 10 \cdot \frac{1}{x} = 5 \end{cases}$$

و فرض می کنیم : $\frac{1}{x} = t$, $\frac{1}{y} = v$, $\frac{1}{z} = u$

در این صورت دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} 20u + 30v - 9t = 26 \\ 3t - 4v = 4 \\ t + 10u = 5 \end{cases}$$

از این دستگاه u , v و t و سپس x و y و z بدست می آید .

جواب : $z = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $x = 10$

۳۲۰. داریم :

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = 1$$

و بنا بر این :

$$(x + y + z)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x + y + z) \times (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

و از آنجا پس از عملیات ساده بدست می آید :

$$xyz = 0$$

واگر $x = 0$ باشد، خواهیم داشت :

$$y_1 = 0 ; y_2 = 1$$

$$z_1 = 1 ; z_2 = 0$$

و غیره .

$$\left| \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 1 \end{array} \right| \quad \text{جواب :}$$

۳۲۱. برای حل معادله می توان از روابط بین ضرایب وریشه ها در معادله درجه سوم استفاده کرد ، یعنی مقادیر x و y و z ریشه های معادله زیر هستند :

$$u^3 - 9u^2 + 26u - 24 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 ; y_1 = 3 ; z_1 = 4 ; \quad \text{جواب :}$$

$$y_2 = 4 ; z_2 = 3$$

$$x_{2,4} = 3 ; y_3 = 2 ; z_3 = 4 ;$$

$$y_4 = 4 ; z_4 = 2 ;$$

$$x_{5,6} = 4 ; y_5 = 2 ; z_5 = 3 ;$$

$$y_6 = 3 ; z_6 = 2$$

۳۲۲. برای اینکه دستگاه ساده تری داشته باشیم ، فرض می کنیم :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = u \\ x^2 + z^2 = v \\ y^2 + z^2 = t \end{cases}$$

در این صورت به دستگاه زیر می رسم :

$$\begin{cases} u + v + t = 28 \\ u^2 + v^2 + t^2 = 294 \\ \frac{uv}{t} = \frac{50}{13} \end{cases}$$

و از آنجا :

$$u + v = 28 - t$$

$$u \cdot v = \frac{50}{13}t$$

$$(u + v)^2 - 2uv + t^2 = 294$$

$$(28 - t)^2 - \frac{100}{13}t + t^2 - 294 = 0 \quad \text{و یا :}$$

$$t_1 = 13 \left(t_2 = 18 \frac{1}{13} \right)$$

بامعلوم بودن t مقادیر u و v و سپس با کمک آنها x و y و z بدست می آید.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2,4} = \pm 1 \\ y_{2,4} = \pm 2 \\ z_{2,4} = \pm 3 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x_{1,2} = \pm 1 \\ y_{1,2} = \pm 3 \\ z_{1,2} = \pm 2 \end{array} \right. \quad \text{جواب :}$$

۳۲۳. معادله دوم دستگاه را از مجذور معادله اول کم می کنیم ، بدست می آید :

$$xy + xz + yz = 9 \quad (\alpha)$$

حالا معادله اول دستگاه را از مجذور معادله سوم کم می کنیم :

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} = 5 \quad (\beta)$$

حال اگر معادله (α) را از مجذور معادله (β) کم کنیم ، می شود :

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})\sqrt{xyz} = 8$$

که با توجه به معادله سوم دستگاه بدست می آید :

$$\sqrt{xyz} = 2 ; xyz = 4$$

و حالا باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم (مسئله ۳۲۱ را به بینید) ،

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ xy + xz + yz = 9 \\ xyz = 4 \end{array} \right.$$

$$\text{جواب :} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = 1 \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 4 \end{array} \right. \text{ و غیره}$$

۳۲۴. از جمع و ضرب سه معادله بسادگی بدست می آید :

$$\sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{9} ; x + y + z = \frac{1}{2\sqrt[3]{3}}$$

$$\text{جواب :} \quad z = \frac{2}{9\sqrt[3]{3}} ; y = \frac{1}{6\sqrt[3]{3}} ; x = \frac{1}{9\sqrt[3]{3}}$$

۳۲۵. راهنمایی : پس از ضرب سه معادله در یکدیگر به معادله زیر می رسید :

$$\sqrt[3]{xyz}(\sqrt[3]{xyz} - 1) = 0$$

$$\text{جواب :} \quad z = \frac{1}{8} ; y = 2\frac{2}{5} ; x = 3\frac{1}{3}$$

۳۲۶. از ضرب دو معادله اول دستگاه بدست می آید :

$$\frac{(x+y)(z+t)}{xyzt} = \frac{7 \times 5}{12 \times 18}$$

که با توجه به معادله چهارم دستگاه می شود :

$$(x+y)(z+t) = 105 \quad (۱)$$

اگر $x+y$ و $y+z$ را ریشه های يك معادله درجه دوم فرض کنیم، با توجه باینکه مجموع (معادله سوم دستگاه) و حاصلضرب (معادله (۱)) آنها معلوم است، معادله درجه دوم چنین خواهد بود :

$$u^2 - 22u + 105 = 0$$

$$\text{واز آنجا :} \quad u_1 = 7 ; u_2 = 15$$

بنابراین یکی از دو حالت زیر را خواهیم داشت :

$$x+y=7 ; z+t=15 \quad (۲)$$

$$x+y=15 ; z+t=7 \quad (۳)$$

با استفاده از روابط (۲) در مورد معادلات اول و دوم دستگاه بدست می آید :

$$\begin{cases} x+y=8 \\ xy=12 \end{cases}; \begin{cases} z+t=15 \\ zt=54 \end{cases}$$

باحل این دستگاهها بدست می آید :

$$x_1=3; y_1=4; z_1=6; t_1=9;$$

$$x_2=3; y_2=4; z_2=9; t_2=6;$$

$$x_3=4; y_3=3; z_3=6; t_3=9.$$

و غیره .

۳۲۷. اگر هر يك از نسبتهای مساوی را k فرض کنیم :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = k \quad (1)$$

$$x_1 = kx_2 \quad \text{بدست می آید :}$$

$$x_2 = kx_3 \quad (2)$$

.....

$$x_{n-1} = kx_n$$

و از آنجا :

$$x_1 = x_2 k = x_3 k^2 = x_n k^{n-1} \quad (3)$$

باتوجه به تساویهای (۳) و معادله سوم دستگاه ، بدست می آید :

$$k^{n-1} = 8 \Rightarrow k = 2$$

با استناد از خاصیت نسبتهای مساوی داریم :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = 2;$$

که باتوجه به معادله دوم دستگاه خواهیم داشت :

$$\frac{15 - x_n}{15 - x_1} = 2 \quad (4)$$

از روابط (۱) روشن است که $x_1, x_2, \dots, x_n$ تشکیل يك تصاعد هندسی

می دهند که قدرنسبت آن مساوی $\frac{1}{2}$ است و بنابراین :

$$x_n = x_1 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad (5)$$

و باحل دستگاه معادلات (۴) و (۵) مقدار x_1 بدست می آید . با معلوم بودن x_1 و k سایر مجهولات هم بسادگی محاسبه می شود .

جواب :
$$x_1 = \frac{15 \times 2^{n-1}}{2^n - 1} ; x_2 = \frac{15 \times 2^{n-2}}{2^{n-1} - 1} \text{ و غیره .}$$

۳۲۸. از ضرب معادلات دستگاه در یکدیگر بدست می آید :

$$(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^{n-1} = a_1 a_2 \dots a_n$$

و از آنجا :

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

اگر صورت و مخرج معادله m ام دستگاه را در x_m ضرب کنیم ، می توان آنرا بصورت زیر نوشت :

$$a_m x_m^{\frac{1}{m}} = x_1 x_2 x_3 \dots x_m$$

و بنابراین بسادگی خواهیم داشت :

$$x_m = \sqrt[n-1]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_m}}$$

که در آن داریم : $m = 1 \text{ و } 2 \text{ و } \dots \text{ و } n$

۳۲۹. راهنمایی : داریم :

$$x! + y! = (x+y)! \Rightarrow \frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} = \frac{(x+y)!}{x! y!}$$

سمت راست معادله اخیر عددی است صحیح ولی سمت چپ آن وقتی صحیح است که

$x=y=0$ یا $x=y=1$ یا $x=y=2$ باشد .
جواب : $x=y=1$ ، $z=2$

§ ۷. اعداد مختلط

۳۳۱. جواب : $n > \frac{5}{4}$

۳۳۲. جواب : $k = 2(4 + 3i)$

۳۳۴. جواب : $x=11$ ، $y=-2$

۳۳۵. جواب : ۱

* ۳۳۶. جواب : ۱ و α

۳۴۰. جواب : ۴۰۹۶

۳۴۱. جواب : $-\frac{4}{3}$

۳۴۳. جواب : اگر $n=1$ باشد : $\frac{5}{4}(1+i)$

و اگر $n > 1$ باشد : $(1 - \frac{1}{4^n})(1+i)$

۳۴۵. جواب : $\sqrt{i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

* ۳۵۰. داریم :

$$\begin{aligned} (a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di) = \\ &= [(a+bi)(c+di)][(a-bi)(c-di)] = \\ &= [(ac-bd)+i(bc+ad)][(ac-bd)-i(bc+ad)] = \\ &= (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2 \end{aligned}$$

* ۳۵۱. داریم :

$$\begin{aligned} (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) &= \\ &= (a+i)(a-i)(b+i)(b-i)(c+i)(c-i) = \end{aligned}$$

$$= [(a+i)(b+i)(c+i)][(a-i)(b-i)(c-i)] =$$

$$= \dots = (abc - a - b - c)^2 + (ab + bc + ca - 1)^2$$

و یا عبارتهای شبیه آن .

$$x_2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i : x_1 = 1 - i \quad ۳۵۲$$

*۳۵۵. این مسئله را می توان با روش استقراء ریاضی حل کرد .

اولا داریم :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 4 \cos^2 \varphi - 2 =$$

$$= 2(2 \cos^2 \varphi - 1) = 2 \cos 2\varphi$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= 4 \cos^3 \varphi - 2 \cos \varphi = 2(4 \cos^3 \varphi - 2 \cos \varphi) = 2 \cos 3\varphi$$

حالا فرض می کنیم داشته باشیم :

$$x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} = 2 \cos(n-2)\varphi ;$$

$$x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} = 2 \cos(n-1)\varphi .$$

و ثابت می کنیم :

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\varphi$$

داریم :

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) =$$

$$= 2[2 \cos(n-1)\varphi](2 \cos \varphi) - [2 \cos(n-2)\varphi] =$$

$$= 2[\cos n\varphi + \cos(n-2)\varphi - \cos(n-2)\varphi] = 2 \cos n\varphi$$

راه حل دوم . داریم :

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \varphi \Rightarrow x^2 - 2x \cos \varphi + 1 = 0$$

$$x = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$$

اگر $x = \cos \varphi + i \sin \varphi$ باشد $\frac{1}{x} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ می شود و برعکس و در

هر حال خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} x^n + \frac{1}{x^n} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n + (\sin \varphi - i \sin \varphi)^n = \\ &= (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) + (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) = 2 \cos n\varphi \end{aligned}$$

۳۵۷. واضح است که ریشه های $x^n = 1$ واحد عبارتند از :

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots \text{ و } 2n)$$

و باین ترتیب عبارت $x^n - 1$ را می توان چنین نوشت :

$$x^n - 1 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{2n}) = \prod_{k=1}^{2n} (x - x_k)$$

و این عبارت را می توان چنین نوشت :

$$x^n - 1 = \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k) \cdot \prod_{k=n+1}^{2n-1} (x^n - 1)(x - x_k)$$

(زیرا $x_n = -1$ و $x_{2n} = 1$ است) .

علاوه بر آن داریم :

$$x_{2n-k} = \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n} = \bar{x}_k$$

و بنابراین داریم :

$$x^n - 1 = (x^n - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k)(x - \bar{x}_k) =$$

$$= (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$$

۳۵۸. شبیه تمرین قبل عمل میشود.

۳۵۹. اگر در رابطه دوجمله‌ای $(1+x)^n$ فرض کنیم $x=i$ ، داریم:

$$(1+i)^n = (1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots) \quad (1)$$

از طرف دیگر داریم:

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n \quad (2)$$

$$= (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) بدست می‌آید:

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$$

§ ۸. نامساویها و نامعادلات

۳۶۶. فرض می‌کنیم $x \geq y$ باشد، در اینصورت داریم:

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

واز آنجا:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

۳۶۷. فرض می‌کنیم:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{p} \leq 1; \quad \frac{b}{c} = \frac{1}{q} \leq 1$$

از آنجا :

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{pq} \Rightarrow \frac{c}{a} = pq$$

و نامساوی مفروض بصورت زیر درمی آید :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + pq \geq 3$$

باتوجه باینکه $p \geq 1$ و $q \geq 1$ است، خواهیم داشت :

$$(p-1)(q-1) \geq 0$$

یا :

$$pq \geq p+q-1$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + pq \geq \left(\frac{1}{p} + p\right) + \left(\frac{1}{q} + q\right) - 1 \geq 3$$

و علامت تساوی تنها در صورتی صحیح است که داشته باشیم :

$$\frac{1}{p} + p = \frac{1}{q} + q = 2 \Rightarrow p = q$$

یعنی :

$$a = b = c$$

۳۶۹. بترتیب داریم :

$$a < b$$

$$ak < bk$$

$$ab + ak < ab + bk$$

$$a(b+k) < b(a+k)$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$$

۳۷۰. نامساویهای واضح زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2$$

$$b^2 \geq b^2 - (c-a)^2$$

$$c^2 \geq c^2 - (a-b)^2$$

از ضرب این نامساویها در یکدیگر بدست می‌آید :

$$a^2 b^2 c^2 \geq (a+b-c)^2 (a+c-b)^2 (b+c-a)^2$$

واز آنجا :

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

۳۷۱. بترتیب داریم :

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} ;$$

$$\frac{2}{4} < \frac{4}{5} ;$$

$$\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$$

.....

$$\frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

یعنی :

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{4}{6} \times \dots \times \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{100}{101}$$

واگر فرض کنیم :

$$x = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \dots \times \frac{99}{100}$$

$$x < \frac{1}{101x}$$

خواهیم داشت :

$$x < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10}$$

واز آنجا :

۳۷۲. باتوجه به مسئله ۳۶۹ (بازاء $k=1$) داریم :

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2n}{2n+1}$$

و بنابراین :

$$\left(\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots 2n} \right)^2 < \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots 2n} \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots 2n}{3 \times 5 \times \dots (2n+1)} = \frac{1}{2n+1}$$

واز آنجا نامساوی مفروض بدست می آید .

۳۷۳. جواب : $x < 0.5$

۳۷۴. جواب : $\frac{2}{3} < x < \frac{10}{3}$

۳۷۵. جواب : $-\frac{1}{3} < x < 2$

۳۷۶. طول شاهین‌های ترازو را با x و y نشان می‌دهیم ($x \neq y$) . فرض

کنید در يك كفه ترازو وزنه يك كيلو گرم و در كفه ديگر كالائی به وزن a كيلو گرم گذاشته باشیم ، در اینصورت باید داشته باشیم :

$$x \times 1 = y \times a \Rightarrow a = \frac{x}{y}$$

جای وزنه را عوض می‌کنیم و فرض می‌کنیم برای تعادل ترازو در كفه ديگر كالائی به وزن c كيلو گرم لازم باشد ، در اینصورت :

$$y \times 1 = x \times c \Rightarrow c = \frac{y}{x}$$

وزن کل كالاهاي که در دو مرتبه وزن شده‌اند چنین است :

$$a + c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

ولی بنابر مسئله ۳۶۶ داریم :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$$

بنابراین وزن کلا بیش از مقداری است که بدست می آید .

۳۷۷. فرض می کنیم a و d بترتیب بزرگترین و کوچکترین جملات تناسب زیر (با جملات مثبت) باشند :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

در اینصورت داریم :

$$d = b \cdot \frac{c}{a} = c \cdot \frac{b}{a}$$

که در آن : $\frac{b}{a} < 1$ و $\frac{c}{a} < 1$

نسبت زیر را تشکیل می دهیم :

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} > 1$$

بدست می آید :

$$a-b > c-d$$

$$a+d > b+c$$

و یا :

۳۷۸. داریم :

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2}{2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geq 0$$

باین ترتیب واسطه حسابی دوعدد از واسطه هندسی آنها کوچکتر نیست . حالت

تساوی وقتی وجود خواهد داشت که $a_1 = a_2$ باشد .

۳۷۹. بنابر مسئله قبل داریم :

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$\sqrt{a_1 a_r} \geq \frac{a_1 + a_r}{2}$$

.....

$$\sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$$

که باجمع این نامساویها به نامساوی مطلوب می‌رسیم .
۳۸۰. باتوجه به مسئله ۳۷۸ داریم :

$$1 + a_1 \geq 2\sqrt{a_1}$$

$$1 + a_r \geq 2\sqrt{a_r}$$

.....

$$1 + a_n \geq 2\sqrt{a_n}$$

از ضرب این نامساویها در یکدیگر و باتوجه به اینکه $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ میباشد
نامساوی مورد نظر بدست می‌آید .

۳۸۱. راهنمایی : از قضیهٔ برنولی استفاده کنید (مسئله ۴۸۶).
۳۹۱. داریم :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \\ & = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n} \right) + \dots + \frac{1}{2n+1} = \\ & = \frac{2(2n+1)}{(n+1)(2n+1)} + \frac{2(n+1)}{(n+2)2n} + \dots + \frac{2(2n+1)}{2(2n+1)^2} > \\ & > 2(2n+1) \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots + \frac{1}{2(2n+1)^2} \right] = \\ & = 2(2n+1) \left[\frac{n}{(2n+1)^2} + \frac{1}{2(2n+1)^2} \right] = 1 \end{aligned}$$

۳۹۲. اگر فرض کنیم $z = \sqrt[n]{n} - 1$ ($z > 0$)، خواهیم داشت :

$$n = (1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!} z^2 + \dots + z^n;$$

واز آنجا :

$$n > \frac{n(n-1)}{1 \times 2} z^2 ;$$

$$z^2 < \frac{2}{n-1} < \frac{2}{n} ; (n > 2)$$

$$0 < z < \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{یعنی :}$$

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{یا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{و بنابراین :}$$

۳۹۳. واسطه تربیعی * چند عدد غیر منفی از واسطه حسابی آنها کوچکتر نیست، بنابراین :

$$\sqrt{\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2} >$$

$$> \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} .$$

از آنجا :

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq$$

(* واسطه تربیعی چند عدد یعنی جذر حسابی مجموع مربعات آنها ، مثلاً

واسطه تربیعی a و b عبارتست از $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \right)^2 \cdot n$$

حالا نامساوی زیر را در نظر می گیریم (مسئله ۳۸۸):

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

این نامساوی را می توان چنین نوشت :

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

در این صورت نامساوی فوق را می توان چنین نوشت :

$$\begin{aligned} \left(a_1 + \frac{1}{a_1} \right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2} \right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)^2 &\geq \\ &\geq \left(\frac{S_n}{n} + \frac{n}{S_n} \right)^2 \cdot n \end{aligned}$$

و اگر از طرفین این نامساوی $4n$ را کم کنیم، باینصورت درمی آید :

$$\begin{aligned} & \left[\left(a_1 + \frac{1}{a_1} \right)^2 - 4 \right] + \left[\left(a_2 + \frac{1}{a_2} \right)^2 - 4 \right] + \\ & + \dots + \left[\left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)^2 - 4 \right] \geq \left(\frac{S_n}{n} + \frac{n}{S_n} \right)^2 \cdot n - 4n \end{aligned}$$

یعنی :

$$\begin{aligned} \left(a_1 - \frac{1}{a_1} \right)^2 + \left(a_2 - \frac{1}{a_2} \right)^2 + \dots + \left(a_n - \frac{1}{a_n} \right)^2 &\geq \\ &\geq \left(\frac{S_n}{n} - \frac{n}{S_n} \right)^2 \cdot n \end{aligned}$$

§ ۹. تصاعدها

۳۹۴. دستگاه معادلات زیر را تشکیل می دهیم :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 27 & (1) \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 275 & (2) \end{cases}$$

و علاوه بر آن :

$$\frac{a_1 + a_3}{2} \times 3 = 27 \Rightarrow a_1 + a_3 = 18 \quad (3)$$

از معادلات (۱) و (۳) بدست می آید : $a_2 = 9$
 با معلوم بودن a_2 برای a_1 و a_3 دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 18 \\ a_1^2 + a_3^2 = 194 \end{cases}$$

و از آنجا : $a_1 = 5$ ، $a_3 = 13$.

جواب : $5; 9; 13; \dots$

۳۹۵. طبق شرط مسئله داریم :

$$S_n = 3n^2$$

بازاء $n=1$ داریم : $S_1 = a_1 = 3$

بازاء $n=2$ داریم : $S_2 = a_1 + a_2 = 12$

و بنابراین : $a_2 = 9$

جواب : $3, 9, 15, 21, \dots$

۳۹۶. از رابطه $11 + 6d = 35$ ، قدر نسبت $d=4$ برای تصاعد اول بدست می آید . و چون $a_4 = a'_4$ است ، داریم :

$$11 + 3 \times 4 = 38 + 3d' ;$$

و بنابراین $d' = -5$ قدر نسبت تصاعد دوم خواهد بود .

و اگر تعداد جملات تصاعد دوم را به n' نشان دهیم ، از رابطه زیر بدست می آید :

$$13 = 38 + (n' - 1)(-5)$$

جواب : $n' = 6$

۳۹۷. a_1, a_{n-2}, a_n و راقیمت کندن آخرین متر، سومین متر از آخر و اولین متر چاه فرض می‌کنیم. در این صورت طبق شرط مسئله داریم:

$$a_n + a_{n-2} = n \cdot a_1 ;$$

و یا:

$$a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-3)d = na_1 ;$$

$$2d(n-2) = a_1(n-d) \quad \text{یعنی:}$$

$$(n-2)(2d-a_1) = 0$$

از آنجا $a_1 = 2d = 40$ بدست می‌آید (زیرا طبق شرط مسئله $d = 20$ و $n-2 \neq 0$ است). و چون مخارج کندن چاه بطور متوسط متری ۱۷۰ ریال است، بنابراین:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = 170 ;$$

$$S_n = 170n \quad \text{و یا:}$$

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = 170n \Rightarrow n = 14$$

جواب: عمق چاه ۱۴ متر است.

۳۹۸. فرض کنید جمله n ام (a_n) از تصاعد اول مساوی جمله m ام (a'_m) از تصاعد دوم باشد، در این صورت باید داشته باشیم:

$$5 + (n-1)3 = 3 + (m-1)4 ;$$

$$3n + 2 = 4m - 1 ; \quad \text{یا:}$$

$$n = m + \frac{m}{3} - 1 \quad (A) \quad \text{و از آنجا:}$$

برای اینکه n عددی صحیح و مثبت باشد، باید $\frac{1}{3}m = k$ نیز عددی مثبت

و صحیح باشد، یعنی $m = 3k$. بنابراین رابطه (A) چنین می‌شود:

$$n = 4k - 1$$

بنابر فرض مسئله n می‌تواند اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰ باشد و بنابراین داریم:

$$k=1,2,3,\dots,25$$

یعنی تعداد جملات مشترک دو تصاعد برابر ۲۵ است و خود این جملات عبارتند از:

$$11, 23, 35, \dots, 299$$

۳۹۹. تساوی زیر واضح است :

$$a_m - a_n = (m - n)d ;$$

$$n - m = (m - n)d ; \quad \text{یا}$$

$$d = -1 \quad \text{و بنابراین}$$

از طرف دیگر داریم :

$$a_p - a_n = (p - n)d ;$$

و از آنجا مقدار جمله a_p بدست می آید .

$$a_p = m + n - p \quad \text{جواب :}$$

۴۰۰. تعداد جملات واسطه حسابی را به x نشان می دهیم . باین ترتیب تصاعد حسابی با $x+2$ بدست می آید که جمله اول آن $a_1 = 1$ و جمله آخر آن $a_n = 31$ است .

قدرنسبت تصاعد را از رابطه زیر بدست می آوریم :

$$31 = 1 + (x+1)d \Rightarrow d = \frac{30}{x+1}$$

اولین واسطه حسابی مساوی :

$$a_2 = 1 + d$$

و آخرین آنها مساوی :

$$a_{n-1} = 31 - d = \frac{31x+1}{x+1}$$

و واسطه حسابی ماقبل آخر مساوی :

$$a_{n-2} = 31 - 2d = \frac{31x-29}{x+1}$$

خواهد بود. از طرف دیگر مجموع همه واسطه های حسابی چنین است :

$$\frac{1+d+31-d}{2} \cdot x = 16x$$

باتوجه به صعودی بودن تصاعد، بزرگترین دو جمله آن a_{n-2} و a_{n-1} است و بنابراین طبق فرض مسئله باید داشته باشیم:

$$2\left(\frac{31x+1}{x+1} + \frac{31x-29}{x+1}\right) = 16x$$

$$2x^2 - 29x + 14 = 0 \quad \text{و یا:}$$

$$x = 14 \quad \text{جواب:}$$

$$۴۰۱. \text{ جواب: } ۲۵ \quad ۳۵۰$$

$$۴۰۲. \text{ جواب: } ۷۵$$

$$۴۰۳. \text{ روابط مفروض را چنین می نویسیم:}$$

$$(a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = ۳۴ ;$$

یعنی:

$$2a_1 + 5d = ۱۷ \Rightarrow (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = ۱۷$$

$$(a_1 + d)(a_1 + 4d) = ۵۲ \quad \text{و:}$$

با معلوم بودن مجموع و حاصلضرب دو جمله $(a_1 + d)$ و $(a_1 + 4d)$ میتوان آنها را محاسبه کرد:

$$a_1 + d = ۴ ; a_1 + 4d = ۱۳$$

$$a_1 = ۱ ; d = ۳ \quad \text{و از آنجا:}$$

$$a_{۲۰} = ۱ + ۱۹ \times ۳ = ۵۸ \quad \text{بنابراین:}$$

$$۵۸ \quad \text{جواب:}$$

$$۴۰۴. \text{ راهنمایی: داریم:}$$

$$\frac{(a_1 + a_{2n})n}{2} = ۱۲۶ \Rightarrow ۲۱n = ۱۲۶$$

$$n = ۶$$

۴۰۵. طبق شرط مسئله، اعداد a ، b و c به تصاعد حسابی هستند یعنی:

$$a - b = b - c \quad (۱)$$

ثابت می کنیم که:

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad (2)$$

داریم :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \\ &= \frac{b - c}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} \quad (3) \end{aligned}$$

بهین ترتیب با توجه به رابطه (۱) بدست می آید :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} &= \frac{a - b}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \\ &= \frac{b - c}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \quad (4) \end{aligned}$$

و از روابط (۳) و (۴) رابطه مورد نظر (۲) نتیجه می شود .

۴۰۶. طبق شرط داریم :

$$S_n = S_m \quad (m \neq n) ;$$

$$[2a + d(n-1)]n = [2a + d(m-1)]m ; \quad \text{یعنی :}$$

$$2a = -d(m+n-1) \quad \text{از آنجا :}$$

$$S_{m+n} = \frac{[2a + (m+n-1)d](m+n)}{2} \quad \text{علاوه بر آن :}$$

و اگر در این رابطه بجای $2a$ مقدارش را قرار دهیم ، بدست می آید :

$$S_{m+n} = \frac{0 \times (m+n)}{2} = 0$$

۴۰۷. راهنمایی : داریم :

$$\frac{S_n}{n} + \frac{S_{r_n}}{r_n} = \frac{S_{r_n}}{n}$$

و از آنجا بدست می آید :

$$S_{rn} = 3(S_{rn} - S_n)$$

* ۴۰۸. داریم :

$$S_n = \frac{1}{r} [2a_1 + (n-1)d]n = \frac{d}{r} n^2 + \frac{(2a_1 - d)n}{r}$$

و بنابراین با توجه به شرط مسئله خواهیم داشت :

$$dn^2 + (2a_1 - d)n \equiv 6n^2 + 8n$$

$$\left| \begin{array}{l} d=6 \\ 2a_1 - d=8 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} d=6 \\ a_1=7 \end{array} \right. \quad \text{واز آنجا :}$$

جواب : $7, 13, 19, \dots$

۴۰۹. داریم :

$$S_m = \frac{2a_1 + (m-1)d}{2} \cdot m ;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n .$$

و بنابراین با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت :

$$\frac{[2a_1 + (m-1)d] \cdot m}{[2a_1 + (n-1)d] \cdot n} = \frac{m^2}{n^2} ;$$

$$(2a_1 - d)(m - n) = 0 \quad (m \neq n)$$

$$a_1 = \frac{d}{2} \quad \text{واز آنجا :}$$

بنابراین می توان نوشت :

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1)d}{a_1 + (n-1)d} = \frac{\frac{d}{2} + (m-1)d}{\frac{d}{2} + (n-1)d} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

۴۱۰. برای اینکه این سه عدد به همین ترتیبی که نوشته شده به تصاعد حسابی

باشند ، باید داشته باشیم :

$$2 \log(2^x - 1) = \log 2 + \log(2^x + 2) ;$$

$$\log(2^x - 1)^2 = \log[2(2^x + 2)]$$

$$(2^x - 1)^2 = 2(2^x + 2) \Rightarrow \text{واز آنجا :}$$

$$2^{2x} - 4 \times 2^x - 5 = 0 \Rightarrow 2^x = 5 \quad (2^x = -1)$$

$$x = \log_2 5 \quad \text{جواب :}$$

۴۱۱. طبق فرض مسئله رابطه زیر را تشکیل می دهیم :

$$\log_k x - \log_m x = \log_m x - \log_n x$$

$$2 \log_m x = \log_k x + \log_n x \quad \text{و یا :}$$

باتوجه به رابطه $\log_a N = \frac{\log_k N}{\log_k a}$ می توان تساوی فوق را بصورت زیر نوشت :

$$2 \frac{\log_k x}{\log_k m} = \frac{\log_k x}{\log_k k} + \frac{\log_k x}{\log_k n} ;$$

$$2 \log_k n = \log_k m (1 + \log_k n) \quad \text{و یا :}$$

$$\log_k n^2 = \log_k m (\log_k k + \log_k n) = \log_k (kn)^{\log_k m}$$

$$n^2 = (kn)^{\log_k m} \quad \text{واز آنجا :}$$

۴۱۲. اولین جمله گروه دوم چنین است :

$$3 = 2 \times \frac{2(2-1)}{2} + 1$$

و اولین جمله گروه سوم :

$$7 = 2 \times \frac{3(3-1)}{2} + 1$$

.....

و اولین جمله گروه n ام :

$$2 \times \frac{n(n-1)}{2} + 1 = n^2 - n + 1$$

باین ترتیب داریم :

$$a_1 = n^2 - n + 1 ; d = 2 ; a_n = n^2 + n - 1$$

و بنابراین :

$$S_n = \frac{(n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1)n}{2} = n^3$$

* راه حل دوم. ۱. در گروه اول يك عدد ، در گروه دوم ۲ عدد و بالاخره در گروه n ام n عدد وجود دارد . بنابراین تعداد جملات n گروه چنین است :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

و بنابراین می توان بسادگی مجموع n گروه را رویهم بدست آورد :

$$\begin{aligned} \text{مجموع جملات } n \text{ گروه} &= \frac{1}{2} \left[2 + \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) 2 \right] \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

و اگر در نتیجه‌ای که بدست آمده n را به $n-1$ تبدیل کنیم ، مجموع جملات $n-1$ گروه بدست می آید :

$$\text{مجموع جملات } (n-1) \text{ گروه} = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

و از آنجا مجموع جملات گروه n ام برابر تفاضل این دو مقدار می شود :

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = n^3$$

۴۱۳. بسادگی روشن می شود که تعداد جملات گروه k ام برابر $2k-1$ و آخرین جمله این گروه مساوی k^2 می باشد. آخرین جمله گروه $(k-1)$ ام مساوی $(k-1)^2$ است و بنابراین اولین جمله گروه k ام مساوی $(k-1)^2 + 1$ خواهد بود . باین ترتیب :

(۱) راه حل اول که در کتاب اصلی ارائه شده و ما هم در اینجا آورده ایم بطریق استقراء ناقص است و بنابراین قانع کننده نیست . بهمین مناسبت راه حل دیگری که هم ساده تر و هم دقیق تر است ذکر می کنیم
(مترجم)

$$S_k = \frac{[(k-1)^2 + 1 + k^2](2k-1)}{2} = (k^2 - k + 1)(2k-1)$$

۴۱۴. تصاعد حسابی را که تعداد جملات آن زوج است در نظر می گیریم :

$$S_1 + S_r = (a_1 + a_r + \dots + a_n) + (a_{n+1} + \dots + a_{2n}) ;$$

$$S_1 = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} ;$$

$$S_r = \frac{(a_{n+1} + a_{2n})n}{2} ;$$

که در آنها داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d ;$$

$$a_{n+1} = a_1 + nd ;$$

$$a_{2n} = a_1 + (2n-1)d ;$$

که اگر این مقادیر را در S_1 و S_r قرار دهیم ، بدست می آید :

$$S_r - S_1 = \frac{n}{2} \times 2 \cdot dn = dn^2$$

۴۱۵. مجموع n جمله اول تصاعد را به S نشان می دهیم :

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

و مجموع kn جمله بعدی را به S' :

$$S' = \frac{a_{n+1} + a_{(k+1)n}}{2} \cdot kn$$

فرض می کنیم نسبت S به S' مساوی m باشد ، یعنی :

$$\frac{a_1 + a_n}{(a_{n+1} + a_{(k+1)n})k} = m$$

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{\{2a_1 + nd + [(k+1)n-1]d\}} = m ; \quad \text{یا :}$$

واز آنجا پس از تبدیلات لازم خواهیم داشت :

$$(2a_1 - d)(mk - 1) - nd[(k+2)mk - 1] = 0 \quad (1)$$

رابطهٔ اخیر، طبق شرط مسئله، باید مستقل از n باشد و بنابراین ضریب n در آن مساوی صفر می‌شود:

$$(k+2)mk - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{k(k+2)}$$

و در این صورت رابطهٔ (۱) پس از قرار دادن مقدار m چنین می‌شود:

$$(2a_1 - d) \frac{k+1}{k+2} = 0 ;$$

عامل دوم یعنی $\frac{k+1}{k+2}$ مخالف صفر است و بنابراین داریم:

$$2a_1 - d = 0 \Rightarrow d = 2a_1$$

و تصاعد حسابی مورد نظر چنین است:

$$a_1, 3a_1, 5a_1, 7a_1, \dots$$

۴۱۶. اعداد مجهول را باین ترتیب در نظر می‌گیریم:

$$a_1 = 2a$$

$$a_2 = 2a + 2b = 2(a+b)$$

$$a_3 = 2a + 4b = 2(a+2b) \quad (1)$$

$$a_4 = 2a + 6b = 2(a+3b)$$

که طبق شرط مسئله باید داشته باشیم:

$$12(a+2b)(2a+3b) = (2a+b)^3 \quad (2)$$

از این تساوی معلوم می‌شود که باید $(2a+b)^3$ بر ۴ قابل قسمت باشد و برای این منظور لازم که b عددی زوج باشد: $b = 2c$. در این صورت رابطهٔ (۲) چنین می‌شود:

$$3(a+4c)(a+3c) = (a+c)^3 \quad (3)$$

رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که باید $a+c$ بر ۳ قابل قسمت باشد یعنی $a+c = 3k$ ، که اگر در رابطهٔ (۳) قرار دهیم می‌شود:

$$(3k+4c)(k+c) = 3k^2 ;$$

$$2c^2 + 5kc - 3k^2(k-1) = 0 \quad \text{یا:}$$

واز آنجا:

$$c_1 = \frac{-5k + k\sqrt{24k+1}}{4} \left(c_2 = \frac{-5k - k\sqrt{24k+1}}{4} \right);$$

$$a = 3k - c_1 = \frac{17k - k\sqrt{24k+1}}{4}$$

و چون $a \geq 0$ است باید داشته باشیم:

$$17 \geq \sqrt{24k+1} \Rightarrow k \leq 12$$

از مقادیر قابل قبول k باید آنها را انتخاب کرد که بازاء آنها $24k+1$

مجذور کامل شود و این مقادیر عبارتند از ۱، ۲، ۵، ۷ و ۱۲.

جواب: اعداد مورد نظر چنین اند:

$$6, 6, 6, 6$$

$$22, 18, 14, 10$$

$$182, 126, 70, 14$$

$$422, 288, 144, 0$$

۴۱۷. $d > 0$ فرض کنید، در این صورت داریم:

$$d = a_r - a_1 = \dots = a_n - a_{n-1} > 0$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a_1 \cdot a_r} &= \frac{a_r - a_1}{a_1 a_r} \cdot \frac{1}{d} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_r} \right) \cdot \frac{1}{d}; \\ \frac{1}{a_r \cdot a_r} &= \frac{a_r - a_r}{a_r a_r} \cdot \frac{1}{d} = \left(\frac{1}{a_r} - \frac{1}{a_r} \right) \cdot \frac{1}{d}; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} &= \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} a_n} \cdot \frac{1}{d} = \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) \cdot \frac{1}{d} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_r} + \frac{1}{a_r a_r} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) \cdot \frac{1}{d} = \\ &= \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} \cdot \frac{1}{d} = \frac{n-1}{a_1 a_n}; \end{aligned}$$

که در آن $a_n - a_1 = (n-1)d$ می باشد .
۴۱۸. در تصاعد حسابی داریم :

$$a_k - a_{k-1} = d$$

$$(k=1, 2, 3, \dots, n)$$

داریم :

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_n} = \\ &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} = \\ &= \frac{(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) + \dots + (\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}})}{d} = \\ &= \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}} \end{aligned}$$

زیرا $a_n - a_1 = (n-1)d$ می باشد .

۴۱۹. داریم :

$$a_n = 1 + 17(n-1) = 333 \dots 3 \quad (۱)$$

که در آن n تعداد جملات تصاعد است .

از رابطه (۱) نتیجه می شود که عدد بصورت $333 \dots 3$ باید در تقسیم بر ۱۷ باقیمانده ای مساوی واحد داشته باشد. اولین عددی که از ارقام ۳ درست شده و این خاصیت را داشته باشد 3333 است و از آنجا $n = 197$ بدست می آید. جملات مورد نظر این تصاعد حسابی ، جملاتی هستند که شامل $16k + 4$ (k عددی است صحیح و غیر منفی) رقم مساوی ۳ باشند ، زیرا در تقسیم عدد $333 \dots 3$ بر ۱۷ ، وقتی که باقیمانده مساوی صفر شود ، دوره تناوبی مساوی ۱۶ رقم بدست می آید .

۴۲۰. جواب : $-1, 0, 1, 2$:

۴۲۱. داریم :

$$a_1 + (k-1)d = a ;$$

$$a_1 + (p - 1)d = b ;$$

$$a_1 + (q - 1)d = c .$$

شرط لازم و کافی برای اینکه مسئله جواب داشته باشد اینست که سه معادله فوق نسبت به مجهولات a_1 و d متوافق باشند و اگر a_1 و d را بین آنها حذف کنیم ، می شود :

$$(a - b)(p - q) = (b - c)(k - p)$$

$$(p - q)a + (q - k)b + (k - p)c = 0 \quad \text{جواب :}$$

۴۲۲. فرض می کنیم $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ جملاتی از يك تصاعد حسابی باشند ، در این صورت داریم :

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = md$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} = nd$$

که در آنها d قدر نسبت تصاعد و m و n اعدادی صحیح هستند . داریم :

$$m(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = n(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$m\sqrt{5} - n\sqrt{3} = (m - n)\sqrt{2}$$

اگر طرفین این تساوی را مجذور کنیم ، بدست می آید :

$$5m^2 + 3n^2 - 2mn\sqrt{15} = 2(m - n)^2$$

و از آنجا :

$$\sqrt{15} = \frac{5m^2 + 3n^2 - 2(m - n)^2}{2mn}$$

و این غیر ممکن است ، زیرا $\sqrt{15}$ عددی است گنگ .

۴۲۳ اگر مسافتی را که جسم در حال سقوط طی می کند با کمک تصاعد حسابی بدست آوریم ، برای هر دو جسم $a_1 = 4/9$ و $d = 9/8$ خواهد بود . فرض کنیم جسم اول x ثانیه و جسم دوم $(x - 3)$ ثانیه در حال سقوط باشد ، طبق شرط باید داشته باشیم :

$$S_1 - S_3 = 1000 \quad (\text{متر})$$

S_1 و S_3 عبارتند از مسافتهائی که دو جسم طی کرده اند تا فاصله بین آنها مساوی يك کیلو متر شود .

از طرف دیگر داریم :

$$S_1 = \frac{[2a_1 + d(x-1)]x}{2} = 4/9x^2 ;$$

$$S_2 = \frac{[2a_1 + d(x-4)](x-3)}{2} = 4/9(x-3)^2$$

و بنابراین :

$$S_1 - S_2 = 4/9x^2 - 4/9(x-3)^2 = 1000$$

$$14/7(2x-3) = 1000$$

جواب : تقریباً ۳۵/۵ ثانیه .

۴۲۴. اولین کارگاه خودکار در ساعت ۸ شروع بکار کرده است و ۱۵ کارگاه

بقیه هر يك بفاصله $\frac{1}{30}$ ساعت ، بنابراین همه کارگاهها بعد از نیم ساعت کار را شروع کرده اند .

کار ۱۶ کارگاه در ۶/۵ ساعت چنین می شود :

$$m \times 16 \times 6/5 = 104m \quad (\text{متر})$$

و برای محاسبه محصول کارگاهها در فاصله نیم ساعت اولیه ، از تصاعد حسابی استفاده می کنیم :

$$S = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2} = 4m \quad (\text{متر})$$

$$\text{که در آن } a_1 = \frac{m}{2} , d = -\frac{m}{30} \text{ و } n = 15$$

جواب : ۱۰۸m متر .

۴۲۵. وقتی که يك معادله دو مجذوری چهار جواب حقیقی داشته باشد ، این جوابها دو بدو قرینه یکدیگر خواهند بود . جوابها را $a_1 \pm a_2$ فرض می کنیم .

اگر $a_1 > a_2$ باشد ، چون چهار جواب به تصاعد حسابی هستند داریم :

$$(1) \quad a_2 \text{ و } a_1 \text{ و } -a_2 \text{ و } -a_1 :$$

از اولین سه جمله و دومین سه جمله این تصاعد نتیجه می شود :

$$-2a_7 = a_7 - a_1 ;$$

$$2a_7 = a_1 - a_7 \quad \text{وازا نجا :}$$

$$\pm 3a_7 = \pm a_1 \quad (2)$$

واز روابط (۱) و (۲) بدست می آید :

$$: -3a_7, -a_7 \text{ و } a_7, 3a_7$$

و بنابراین ریشه های معادله دو مجذوری به نسبت اعداد زیر خواهند بود :

$$(-3):(-1):1:3$$

۴۲۶. باحل معادله معلوم می شود که بزرگترین ریشه آن مساوی ۱۰ است .

حالا جمله عمومی بسط دوجمله ای را می نویسیم :

$$T_{k+1} = C_{r_0}^k x^{\frac{k-20}{4} + \frac{k}{6}}$$

برای اینکه این جمله مستقل از x باشد باید داشته باشیم :

$$\frac{k-20}{4} + \frac{k}{6} = 0 \Rightarrow k = 12$$

و بنابراین ردیف جمله مساوی ۱۳ است .

طبق شرایط مسئله باید داشته باشیم :

$$a_1 a_4 = 10 ; a_7^2 + a_3^2 = 5 \times 13$$

اگر در این دو رابطه قرار دهیم :

$$a_7 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

دستگاه بدست آمده را بر حسب a_1 و d حل کنیم ، جواب بدست می آید .

جواب : ۱، ۴، ۷، ۱۰ یا -۱، -۴، -۷، -۱۰

۴۲۷. از رابطه $S = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$ مقدار u_1 بدست می آید ، یعنی :

$$635 = u_1(2^7 - 1)$$

$$u_1 = 5 ; u_n = 5 \times 2^6 = 320 \quad \text{وازا نجا :}$$

۴۲۸. داریم :

$$u_m = u_1 q^{m-1} ; u_n = u_1 q^{n-1}$$

اگر این دو رابطه را برهم تقسیم کنیم و بجای u_m و u_n مقادیرش را قرار دهیم بدست می آید :

$$\frac{k}{l} = q^{m-n} \Rightarrow q = \sqrt[m-n]{\frac{k}{l}}$$

$$u_1 = \sqrt[m-n]{\frac{l^{m-1}}{k^{n-1}}} \quad \text{بنابراین :}$$

و چون $u_p = u_1 q^{p-1}$ می باشد، نتیجه می گیریم :

$$u_p = \sqrt[m-n]{\frac{k^{p-n}}{l^{p-m}}}$$

۴۲۹. داریم :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \dots = \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = q ;$$

و اگر از خاصیت مربوط به ردیف نسبت های مساوی استفاده کنیم ، بدست می آید :

$$\frac{u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{2n}}{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2n-1}} = q ;$$

۴۳۰. داریم :

$$u_5 = u_1 q^4 ; u_7 = u_1 q^6 ; u_9 = u_1 q^8$$

اگر این مقادیر را در روابط مفروض مسئله قرار دهیم، بدست می آید :

$$\begin{cases} u_1(1+q^4) = 51 \\ u_1 q(1+q^4) = 102 \end{cases}$$

با حل این دستگاه $q=2$ و $u_1=3$ می شود .

اگر مقادیر u_1 و q را در رابطه مجموع جملات تصاعد هندسی قرار دهیم، خواهیم داشت :

$$3069 = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 2^n = 1024 = 2^{10}$$

جواب : $n = 10$

۴۳۱. شبیه تمرین قبل حل میشود .

جواب : $9, 27, 81, 243$

۴۳۲. داریم :

$$1 = \frac{10^1 - 1}{9} ; 11 = \frac{10^2 - 1}{9} ; \dots ; \frac{10^n - 1}{9}$$

و بنابراین مجموع مورد نظر چنین میشود :

$$S_n = \frac{1}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n)$$

$$S_n = \frac{1}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right] \quad \text{جواب :}$$

۴۳۳. قرارداد n واسطه هندسی بین دو عدد بمعنای اینست که یک تصاعد هندسی تشکیل دهیم که تعداد جملات آن $n + 2$ و جملات اول و آخر آن اعداد مفروض باشد .

اینجا تصاعد هندسی با 11 جمله خواهیم داشت که جمله اول آن $\frac{b^2}{a^3}$

و جمله یازدهم آن $\frac{a^2}{b^3}$ است ، بنابراین :

$$\frac{a^2}{b^3} = \frac{b^2}{a^3} \cdot q^{10}$$

و از آنجا :

$$q = \sqrt[10]{\frac{a^5}{b^5}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

و تصاعد مورد جستجو چنین است :

$$\frac{b^2}{a^3}, \frac{b^2}{a^3} \sqrt{\frac{a}{b}} ; \frac{b}{a^2} ; \dots ; \frac{a^2}{b^3}$$

۴۳۴. جواب : ۶۴, ۱۶, ۴

۴۳۵. داریم :

$$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 62 ;$$

$$\log u_1 + \log u_1 + \log q + \log u_1 + 2 \log q = 3$$

و بنا بر این دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 62 \\ u_1 q = 10 \end{cases}$$

و بدست می آید .

$$q_1 = 5 ; u_1 = 2 ;$$

$$q_2 = \frac{1}{5} ; u_2 = 5 .$$

جواب : ۵۰ , ۱۰ , ۲

۴۳۶. جواب : ۱۲ , ۶ , ۳

۴۳۷. راهنمایی :

$$\begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 195 \\ u_1 q^2 - u_1 = 120 \end{cases}$$

جواب : ۱۲۵ ; -۱۷۵ ; ۲۴۵ یا ۱۵ ; ۴۵ ; ۱۳۵

۴۳۸. جواب : ۱۸ ۴۴۶ ۷۴۴ ۵۷۳ ۷۵۹ ۵۵۱ ۶۱۵ دانه گندم *

۴۳۹. فرض کنید چهار عدد چنین باشد :

$$\log_a X ; \log_{ax} X ; \log_{ax^2} X ; \log_{ax^3} X$$

طبق فرض مسئله داریم :

$$\log_a X + \log_{ax} X = \log_{ax^2} X + \log_{ax^3} X$$

یعنی :

(*) اگر تمام زمینهای قابل کشت کره زمین را گندم بکارند ، حتی در ۱۰ سال نمی توان چنین محصولی را جمع آوری کرد .

$$\log_a x + \frac{\log_a x}{\log_a ax} = \frac{\log_a x}{\log_a ax^2} + \frac{\log_a x}{\log_a ax^3}$$

که پس از تبدیلات مقدماتی خواهیم داشت .

$$3 \log_a^2 x + 6 \log_a x + 2 = 0$$

$$\log_a x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3} \quad \text{واز آنجا :}$$

۴۴۰. با توجه باینکه $\log m$ ، $\log n$ و $\log p$ به تصاعد هندسی هستند ، تساوی زیر را خواهیم داشت :

$$\log m \cdot \log p = (\log n)^2$$

که با استفاده از رابطه لگاریتم (مسئله ۵۰۱ را به بینید) ، بدست می آید :

$$\frac{\log x}{\log_m x} \cdot \frac{\log x}{\log_p x} = \frac{(\log x)^2}{(\log_n x)^2}$$

$$\log_m x \cdot \log_p x = (\log_n x)^2 \quad \text{و یا :}$$

یعنی این مقادیر هم به تصاعد هندسی هستند .

۴۴۱. فرض می کنیم S مجموع تمام جملات تصاعد هندسی و S_1 مجموع جملات ردیف فرد باشد ، طبق فرض داریم .

$$S = 3S_1$$

$$\frac{u_1(q^{2n}-1)}{q-1} = 3 \times \frac{u_1(q^{2n}-1)}{q^2-1} \quad \text{یعنی :}$$

$$q = 2 \quad \text{واز آنجا :}$$

۴۴۲. مربعات جملات يك تصاعد هندسی خودتشکیل تصاعد هندسی می دهند که جمله اول آن u_1^2 و قدر نسبت آن q^2 است ، یعنی :

$$u_1^2, u_1^2 q^2; u_1^2 q^4; \dots$$

$$S_1 = \frac{u_1^2(q^{2n}-1)}{q^2-1} \quad \text{و بنا بر این داریم :}$$

۴۴۳. اولین جمله تصاعد هندسی را u_1 ، قدر نسبت آنرا q و مجموع جملاتش را S_1 می گیریم . مربع جملات این تصاعد ، تصاعد هندسی دیگری تشکیل

می‌دهند با جمله اول u_1^2 ، قدرنسبت q^2 و مجموع S_2 . داریم :

$$S_1 = \frac{u_1(q^{2n+1} - 1)}{q - 1}$$

و مجموع مربعات جملات يك تصاعد هندسی (باتعداد جملات $2n + 1$) چنین است :

$$S_2 = \frac{u_1^2(q^{2n+2} - 1)}{q^2 - 1}$$

دراینصورت :

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{u_1(q^{2n+2} - 1)(q - 1)}{(q^2 - 1)(q^{2n+1} - 1)} = \\ &= \frac{u_1(q^{2n+1} + 1)}{q + 1} = u_1(q^{2n} - q^{2n-1} + \dots + 1) \end{aligned}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم .

۴۴۴. طبق فرض مسئله داریم :

$$u_1 = 10(u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 + \dots) = \frac{10u_1q}{1 - q}$$

$$q = \frac{1}{11} \quad \text{از آنجا :}$$

بنابراین هر تصاعد هندسی نزولی که قدرنسبت آن مساوی $\frac{1}{11}$ باشد در شرایط

مسئله صدق می‌کند .

۴۴۵. قدرنسبت تصاعد هندسی چنین است :

$$q = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

طبق رابطه حد مجموع جملات يك تصاعد هندسی نزولی داریم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2a}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\lambda = \frac{2a}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \text{یا:}$$

$$a = 2(2 - \sqrt{2}) \quad \text{جواب:}$$

۴۴۶. فرض کنید $\frac{1}{2} < q < 1$ قدر نسبت تصاعد باشد، در اینصورت میتوان در نظر گرفت:

$$q = \frac{1}{2} + \omega \quad ; \quad (0 < \omega < 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2u_1}{1-2\omega} ;$$

$$u_r = u_1 q = \frac{u_1(1+2\omega)}{2}$$

حالا تفاضل زیر را در نظر می گیریم:

$$S - 2u_r = \frac{2u_1}{1-2\omega} - 2u_1(1+2\omega) = \frac{4u_1 \cdot \omega^2}{\frac{1}{2} - \omega} > 0$$

$$\frac{1}{2} - \omega > 0 \quad \text{و} \quad u_1 \omega^2 > 0 \quad \text{زیرا داریم:}$$

$$S > 2u_r \quad \text{و بنابراین:}$$

حالت $0 < q < \frac{1}{2}$ را هم می توان با همین روش ثابت کرد.

$$\frac{u_1}{1-q} > 2u_1 q \quad (۱) \quad \text{راه حل دوم. ثابت می کنیم:}$$

که در آن $u_1 q$ و u_1 بترتیب اولین و دومین جمله تصاعد، $u_1 > 0$ ، $q \neq \frac{1}{2}$ و $0 < q < 1$ می باشد.

از نامساوی (۱) بدست می آید:

$$\frac{1}{1-q} > 4q ;$$

$$1 > 4q(1-q)$$

$$1 - 4q + 4q^2 > 0 \Rightarrow (1 - 2q)^2 > 0$$

یعنی نامساوی (۱) همیشه برقرار است

۴۴۷. دو تصاعد هندسی در نظر می گیریم ، بطوریکه جملات تصاعد دوم ، مربع جملات تصاعد اول باشد :

$$\ddot{u}_1 ; u_1 q ; u_1 q^2 ; \dots ; u_1 q^{n-1} ; \dots$$

$$\ddot{u}_1^2 ; u_1^2 q^2 ; u_1^2 q^4 ; \dots ; u_1^2 q^{2(n-1)} ; \dots$$

بنابر فرض مسئله داریم :

$$u_2 = u_1 q = 6$$

$$\frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{8} \cdot \frac{u_1^2}{1-q^2} ;$$

$$\frac{u_1}{1+q} = 8 ; \frac{u_1 q}{(1+q)q} = 8 ; \frac{6}{(1+q)q} = 8 ;$$

$$4q^2 + 4q - 3 = 0 \quad \text{و از آنجا :}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

جواب : $\ddot{12; 6; 3; \dots}$

۴۴۸. (۱) کسر متناوب ساده (۳۷) / ۵ را می توان بصورت مجموع بی نهایت

عدد زیر نوشت : $0/37 + 0/5037 + 0/500037 + \dots$

و در نتیجه خواهیم داشت :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{0/37}{1 - 0/51} = \frac{37}{99}$$

(۲) شبیه حالت قبل می توان نوشت :

$$0/23(254) = 0/23 + 0/50254 + 0/50000254 + \dots =$$

$$\begin{aligned}
 &= 0/23 + \frac{0/00354}{1 - 0/001} = 0/23 + \frac{0/00354}{0/999} = \\
 &= \frac{23}{100} + \frac{354}{999 \times 100} = \frac{23(1000 - 1) + 354}{99900} = \frac{23354 - 23}{99900} \\
 &\frac{23322}{99900} = \frac{3887}{16650} \quad (2 ; \frac{37}{99} \quad (1 : \text{جواب:}
 \end{aligned}$$

۴۴۹. واحد زمان را ساعت و واحد مسافت را محیط دایره ساعت می گیریم:
 بعد از يك ساعت ، عقربه دقیقه شمار روی عدد ۱۲ و عقربه ساعت شمار روی ۱ قرار دارد ، یعنی عقربه ساعت شمار $\frac{1}{12}$ مسافتی را که عقربه دقیقه شمار طی کرده جلو رفته است : سرعت عقربه ساعت شمار $\frac{1}{12}$ سرعت عقربه دقیقه شمار است .

وقتی که عقربه دقیقه شمار این $\frac{1}{12}$ راه را طی کند ، عقربه ساعت شمار باندازه $\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{144}$ دیگر از راه را جلو می رود و در زمانی که عقربه دقیقه شمار این مسافت $\frac{1}{144}$ راه را طی کند ، عقربه ساعت شمار مسافتی باندازه $\frac{1}{144} \times \frac{1}{144} = \frac{1}{20736}$ را جلو می رود و غیره .

بنابراین وقتی که عقربه دقیقه شمار باندازه مجموع بی نهایت جمله از تصاعد هندسی نزولی :

$$1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{144} + \frac{1}{20736} + \dots$$

حرکت کند به عقربه ساعت شمار خواهد رسید .

این حد مجموع را پیدا می کنیم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{12}{11}$$

عقربه دقیقه شمار واحد مسافت را در یک ساعت طی می کند و بنابراین بعد از :

$$27 \frac{3}{11} \text{ ثانیه و } 5 \text{ دقیقه و } 1 \text{ ساعت} = 1 \times \frac{12}{11} \text{ (ساعت)}$$

به عقربه ساعت شمار می رسد .

جواب : يك ساعت و ۵ دقیقه و $27 \frac{3}{11}$ ثانیه .

۴۵۰. داریم :

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \\ &= \frac{1}{u_1} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{n-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{u_1} \left(\frac{1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}}{q^{n-1}} \right) = \\ &= \frac{u_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})}{u_1 \cdot u_1 q^{n-1}} = \frac{S_n}{u_1 \cdot u_n} \end{aligned}$$

که در آن S_n عبارتست از مجموع جملات تصاعد هندسی .

۴۵۱. داریم :

$$\begin{aligned} \Pi_n &= u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_n = u_1 \cdot u_1 q \cdot u_1 q^2 \dots u_1 q^{n-1} = \\ &= u_1^n \cdot 1 \cdot q \cdot q^2 \dots q^{n-1} = \\ &= u_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(u_1 \cdot q^{\frac{n-1}{2}} \right)^n = \end{aligned}$$

$$= \left(u_1^{\frac{1}{2}} \cdot u_1^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{n-1}{2}} \right)^n = \left(u_1^{\frac{1}{2}} \cdot u_n^{\frac{1}{2}} \right)^n = (u_1 \cdot u_n)^{\frac{n}{2}}$$

۴۵۲. داریم (باتوجه به مسئله ۴۵۰) :

$$S'_n = \frac{S_n}{u_1 \cdot u_n} \Rightarrow u_1 \cdot u_n = \frac{S_n}{S'_n} ;$$

$$\Pi_n = (u_1 \cdot u_n)^{\frac{n}{2}} \quad (\text{مسئله شماره ۴۵۱})$$

$$\Pi_n = \left(\frac{S_n}{S'_n} \right)^{\frac{n}{2}} \quad \text{و بنابراین :}$$

۴۵۳. اگر سه عدد مثبت a ، b و c به تصاعد هندسی باشند باید داشته باشیم:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \quad (۱)$$

اگر از طرفین این تساوی درمبنای $N \neq ۱$ لگاریتم بگیریم، می شود:

$$\log_N b - \log_N a = \log_N c - \log_N b ;$$

$$\frac{1}{\log_b N} - \frac{1}{\log_a N} = \frac{1}{\log_c N} - \frac{1}{\log_b N} \quad \text{و یا :}$$

و از آنجا پس از تبدیلات ساده ای خواهیم داشت :

$$\frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N \cdot \log_a N} = \frac{\log_b N - \log_c N}{\log_c N \cdot \log_b N} ;$$

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N} \quad (۲) \quad \text{و یا :}$$

و همچنین بسادگی می توان از رابطه (۲) به رابطه (۱) رسید .

۴۵۴. چون اعداد a ، b و c تشکیل تصاعد هندسی می دهند داریم:

$$b^2 = ac$$

اگر از طرفین تساوی درمبنای N لگاریتم بگیریم، خواهیم داشت :

$$2 \log_N b = \log_N a + \log_N c$$

این رابطه را می توان چنین نوشت :

$$\frac{2}{\log_b N} = \frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_c N}$$

یعنی اعداد $\frac{1}{\log_a N}$ و $\frac{1}{\log_b N}$ و $\frac{1}{\log_c N}$ به تصاعد حسابی هستند .
۴۵۵. طبق فرض مسئله داریم :

$$\begin{aligned} a &= a_1 + 4d = u_1 \cdot q^4 ; \\ b &= a_1 + 16d = u_1 \cdot q^{16} ; \\ c &= a_1 + 36d = u_1 \cdot q^{36} ; \end{aligned}$$

و بنابراین :

$$\begin{aligned} a - b &= -12d ; \\ b - c &= -20d ; \\ c - a &= 24d \end{aligned}$$

و از آنجا :

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = (u_1 q^4)^{-20d} \cdot (u_1 q^{16})^{24d} \cdot (u_1 q^{36})^{-12d} = 1 ;$$

که در آن a_1 و u_1 به ترتیب اولین جملات تصاعد حسابی و تصاعد هندسی d ،
قدر نسبت تصاعد حسابی و q قدر نسبت تصاعد هندسی است .
۹۵۶. بنابر فرض مسئله داریم :

$$u_1 = d ; a_1 = q ; u_1 + u_2 = 9 ; S_{10} = 155$$

$$\left(\frac{2a_1 + 9d}{2} \right) \times 10 = 155$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 9d = 31 \\ u_1 + u_2 q = 9 \end{cases} \quad \text{و یا :}$$

$$\begin{cases} 2q + 9u_1 = 31 \\ u_1 + u_1 q = 9 \end{cases} \quad \text{یعنی :}$$

و از آنجا :

$$q_1 = 2 ; q'_1 = 12/5 ; u_1 = 3 ; u'_1 = \frac{2}{3}$$

جواب : $\div 2, 5, 8, 11, \dots ; \div 3, 6, 12, 24, \dots$

یا :

$$\div \frac{25}{2}, \frac{79}{6}, \frac{83}{6}, \dots; \dots \frac{2}{3}, \frac{25}{3}, \frac{625}{6}, \dots$$

۴۵۷. داریم :

$$(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d);$$

$$a_1 = d$$

واز آنجا :

$$a_4 = a_1 + 3d = 4a_1$$

بنابراین :

$$a_6 = a_1 + 5d = 6a_1$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 9a_1$$

یعنی این سه عدد تشکیل تصاعد هندسی می دهند که قدر نسبت آن مساوی $\frac{3}{2}$ است .

۴۵۸. مجموع جملات هریک از دو تصاعد تنها بخاطر جمله دوم آنها با هم اختلاف دارند . واضح است که جمله دوم تصاعد حسابی ، واسطه حسابی بین دو جمله اول و سوم آنست (a_1 و a_3) و جمله دوم تصاعد هندسی ، واسطه هندسی بین جملات اول و سوم آنست ولی میدانیم :

$$\frac{a_1 + a_3}{2} > \sqrt{a_1 a_3}$$

بنابراین مجموع سه جمله تصاعد حسابی از مجموع سه جمله تصاعد هندسی بزرگتر است.

۴۵۹. x و y و z را اعداد مجهول فرض می کنیم ، در اینصورت داریم :

$$y = x + d = xq$$

$$z = x + 2d = xq^2$$

که با حذف d به رابطه $x(1 - q)^2 = 0$ می رسیم .

اگر $x = 0$ باشد $x = y = z = 0$ می شود ،

و اگر $x \neq 0$ باشد $q = 1$ و $x = y = z$ می شود .

جواب : سه عدد باهم برابرند .

$$a = u_1 \cdot q^{k-1} \quad : ۴۶۵ \text{ داریم}$$

$$b = u_1 \cdot q^{p-1}$$

$$c = u_1 \cdot q^{m-1}$$

برای پیدا کردن رابطه مورد نظر باید u_1 و q را بین این معادلات حذف کرد :

$$\frac{a}{b} = q^{k-p} ; \frac{b}{c} = q^{p-m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{p-m} = q^{(k-p)(p-m)} ;$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{k-p} = q^{(p-m)(k-p)} ;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{p-m} = \left(\frac{b}{c}\right)^{k-p} \quad \text{و از آنجا :}$$

$$a^{p-m} \cdot b^{m-k} \cdot c^{k-p} = 1 \quad \text{جواب :}$$

۱۰۴۶۱) اگر این اعداد جملاتی از یک تصاعد حسابی باشند ، در این صورت دو بدوی آنها بوسیله واسطه های حسابی که بین اعداد a و b و اعداد b و c قرار گرفته اند از هم متمایزند. این واسطه های حسابی را بترتیب $(m-1)$ و $(n-1)$ می گیریم ، در این صورت قدر نسبت تصاعد مساوی $\frac{b-a}{m}$ و یا $\frac{c-b}{n}$ است و بنابراین باید داشته باشیم :

$$\frac{b-a}{m} = \frac{c-b}{n}$$

۲) اگر a را جمله اول یک تصاعد هندسی و b و c را بترتیب جملات m ام و n ام این تصاعد بگیریم ، داریم :

$$b = aq^m ; c = a \cdot q^n$$

که با حذف قدر نسبت q از این دو رابطه ، رابطه مورد نظر بدست می آید:

$$\frac{b^n}{c^m} = \frac{a^n}{a^m} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^m$$

۴۶۲: راهنمایی: با توجه به مسئله قبل باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{12}{11}\right)^n = \left(\frac{13}{11}\right)^m \Rightarrow \frac{12^n}{11^m} = 11^{n-m}$$

که غیرممکن است. بنابراین سه عدد مفروض نمی‌توانند جملاتی از يك تصاعد هندسی باشند.

۴۶۴: جملات مجهول تصاعد حسابی را چنین فرض می‌کنیم:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d$$

بنابر فرض مسئله، اگر به این اعداد بترتیب ۵، ۶، ۹ و ۱۵ را اضافه کنیم يك تصاعد هندسی بدست می‌آید:

$$a_1 + 5, a_1 + d + 6, a_1 + 2d + 9, a_1 + 3d + 15$$

و بنابراین نسبت‌های مساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{a_1 + d + 6}{a_1 + 5} = \frac{a_1 + 2d + 9}{a_1 + d + 6} = \frac{a_1 + 3d + 15}{a_1 + 2d + 9};$$

با حل این دستگاه مقادیر $a_1 = 3$ و $d = 3$ بدست می‌آید.

جواب: ۱۲، ۹، ۶، ۳.

۴۶۵: اعداد مجهول را (که به تصاعد هندسی هستند) چنین فرض می‌کنیم،

$$u_1, u_1q, u_1q^2, u_1q^3$$

که اگر به آنها اعداد مفروض مسئله را اضافه کنیم چهار عدد به تصاعد حسابی بدست می‌آید:

$$u_1 + 4, u_1q + 21, u_1q^2 + 29, u_1q^3 + 1$$

و میدانیم که هر جمله از تصاعد حسابی (بجز جمله اول) واسطه عددی است بین دو جمله مجاورش، باین ترتیب روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_1q + 21 = \frac{1}{2}(u_1 + 4 + u_1q^2 + 29) \\ u_1q^2 + 29 = \frac{1}{2}(u_1q + 21 + u_1q^3 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 q^2 - 2u_1 q + u_1 = 9 \\ q(u_1 q^2 - 2u_1 q + u_1) = 36 \end{cases} \quad \text{و یا :}$$

$$u_1 = 1 \text{ و } q = 4 \quad \text{وازا نجا :}$$

جواب : ۶۴، ۱۶، ۴، ۱.

۹۶۶. معادله مجهول القوه را حل می کنیم :

$$x = S_5 = 5$$

و همچنین حد مجموع جملات تصاعد هندسی نزولی را :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{3}{2}$$

یعنی :

دو معادله زیر را تشکیل می دهیم :

$$\frac{5(a_1 + \frac{3}{2})}{2} = 5 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} ;$$

$$\frac{3}{2} = a_1 + 4d \Rightarrow d = \frac{1}{4}$$

$$\dots \text{ و } \frac{3}{2} \text{ و } \frac{5}{4} \text{ و } 1 \text{ و } \frac{3}{4} \text{ و } \frac{1}{2} \quad \text{جواب :}$$

۴۶۷. داریم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = 16$$

$$S_n = \frac{8[1 - (\frac{1}{2})^n]}{\frac{1}{2}} = 16 - 16(\frac{1}{2})^n$$

برای اینکه شرط مسئله برقرار باشد باید داشته باشیم :

$$64\left(\frac{7}{8}\right)^n = 0.01$$

این معادله را با کمک لگاریتم حل می کنیم ، جواب $n = 65/6$ بدست می آید.
جواب : تعداد جملات انتخاب شده نباید از ۶۶ کمتر باشد .

۴۶۸. بنا بر فرض داریم : $S_n = \frac{7}{3}$ و $a_1 = 3$. این مقادیر را
را در رابطه زیر قرار می دهیم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\frac{7}{2} = \frac{3}{1-q} \quad \text{بدست می آید :}$$

$$q = \frac{1}{7} \quad \text{و از آنجا :}$$

و تصاعد هندسی نزولی مجهول چنین خواهد بود :

$$\dots \text{ و } \frac{3}{49} \text{ و } \frac{3}{7} \text{ و } 3$$

۴۶۹. جواب : ۵۴ و ... و ۳۰ و ۲۷ و ۲۴ ÷

۴۷۰. جواب : ۱۰۸ و ۱۳۵

۴۷۱. جواب : $u_7 = 27$

۴۷۲. جواب : ... و ۱۵ و ۹ و ۳ ÷

$$\dots \text{ و } 27 \text{ و } 9 \text{ و } 3$$

۴۷۳. جواب : ... و ۲۷ و ۹ و ۳ و ۱ ÷

$$\dots \text{ و } 13 \text{ و } 9 \text{ و } 5 \text{ و } 1$$

۴۷۴. جواب : ۳۶ و ۱۲ و ۴ ÷

۴۷۵. بنابه فرض این سه عدد تشکیل تصاعد هندسی می دهند :

$$u_1, u_1q \text{ و } u_1q^2$$

که در آن u_1 جمله اول و q قدر نسبت تصاعد هندسی است .
اعداد :

$$u_1, u_1q \text{ و } (u_1q^2 - 64)$$

به تصاعد عدد حسابی هستند ، بنابراین :

$$(u_1q^2 - 64) - u_1q = u_1q - u_1 \quad (1)$$

$$u_1, (u_1q - 8) \text{ و } (u_1q^2 - 64) \quad \text{ولی اعداد :}$$

دوباره تشکیل تصاعد هندسی می دهند و بنابراین داریم :

$$\frac{u_1q^2 - 64}{u_1q - 8} = \frac{u_1q - 8}{u_1} \quad (2)$$

با حل دستگاه معادلات (۱) و (۲) اعداد مجهول بدست می آید :

جواب : 1000 و 20 و 4

$$\frac{676}{9} \text{ و } \frac{52}{9} \text{ و } \frac{4}{9}$$

۴۷۶. جواب : $\dots$ و 16 و 24 و 36 و 54 و 81

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{جواب : ۴۷۷}$$

۴۷۸. قدرنسبت تصاعد حسابی را d می گیریم ، داریم :

$$c^2 - a^2 = 2d ;$$

$$c^2 - b^2 = d ;$$

$$b^2 - a^2 = d ;$$

$$(c+a)(c-a) = 2d ; \quad \text{یا :}$$

$$(c-b)(c+b) = d ;$$

$$(b-a)(b+a) = d$$

$$\frac{1}{b+c} = \frac{c-b}{d} ; \quad \text{بنابراین :}$$

$$\frac{1}{c+a} = \frac{a-c}{2d} ;$$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{b-a}{d} .$$

از نسبت‌های اخیر بدست می‌آید :

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} = \frac{2b-a-c}{2d}$$

$$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{2b-a-c}{2d} ;$$

و از آنجا :

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} = \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c}$$

۴۷۹. مربع ABCD را در نظر بگیرید (شکل ۱ صفحه ۶۴) ، مساحت آن $S_1 = a^2$ است . مربع $A_1B_1C_1D_1$ را در آن چنان محاط می‌کنیم که رأس A_1 از رئوس A و B به فاصله :

$$AA_1 = \frac{a}{n} ; BA_1 = \frac{(n-1)a}{n}$$

قرار گرفته باشد . علاوه بر آن داریم :

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$$

در اینصورت داریم :

$$A_1B_1^2 = \frac{a^2}{n^2} + \frac{(n-1)^2 a^2}{n^2} = \frac{a^2}{n^2} [1 + (n-1)^2]$$

و مساحت مربع محاطی برابر است با مجذور ضلع آن :

$$S_1 = \frac{a^2}{n^2} [1 + (n-1)^2]$$

و برای مربع محاطی $A_2B_2C_2D_2$ و مربعهای بعد بقریب داریم :

$$A_r A_1 = \frac{a \sqrt{1 + (n-1)^2}}{n^r} ; A_r B_1 = \frac{(n-1)a \sqrt{1 + (n-1)^2}}{n^r} ;$$

$$S_r = \frac{a^r [1 + (n-1)^2]^{\frac{r}{2}}}{n^r} + \frac{a^r [1 + (n-1)^2]^{\frac{r}{2}} (n-1)^r}{n^r} =$$

$$= \frac{a^r}{n^r} [1 + (n-1)^2]^{\frac{r}{2}} ;$$

$$S_i = \frac{a^i [1 + (n-1)^2]^{\frac{i}{2}}}{n^i} + \frac{a^i [1 + (n-1)^2]^{\frac{i}{2}} (n-1)^i}{n^i} =$$

$$= \frac{a^i}{n^i} [1 + (n-1)^2]^{\frac{i}{2}} ;$$

وبسادگی روشن می شود که :

$$\frac{S_r}{S_1} = \frac{S_r}{S_1} = \frac{S_i}{S_1} \dots = \frac{1 + (n-1)^2}{n^2} ;$$

و بنابراین دنباله اعداد :

$$S_1 ; S_2 ; S_3 ; \dots ; S_m ; \dots$$

تشکیل يك تصاعد هندسی نزولی می دهند که قدر نسبت آن چنین است :

$$q = \frac{1 + (n-1)^2}{n^2} < 1 ;$$

$$S = \frac{a^2}{1 - \frac{1 + (n-1)^2}{n^2}} = \frac{n^2 a^2}{2(n-1)} \quad (n \geq 2)$$

۴۸۵. حد مجموع مساحت های مربعها وقتی می نیمم است که مساحت هریک از آنها می نیمم باشد .

فرض کنید روی اضلاع مربع مفروض ABCD پاره خط های مساوی AA₁ , BB₁ , CC₁ و DD₁ را جدا کرده باشیم ، بدین ترتیب از وصل نقاط

A_1, B_1, C_1, D_1 بیکدیگر مربع محاطی بدست می آید، باید به بینیم بازاء چه مقداری از AA_1 ، مربع محاطی $A_1B_1C_1D_1$ دارای سطح می نیمم است ؟

اگر $AA_1 = x$ فرض کنیم، $AD_1 = a - x$ می شود. از مثلث قائم الزاویه AA_1D_1 بدست می آید :

$$A_1D_1^2 = x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 ;$$

توجه می کنیم که $A_1D_1^2$ برابر است با S مساحت مربع محاطی $A_1B_1C_1D_1$ داریم :

$$S = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

بنابراین مساحت S وقتی می نیمم است که یکی از این جملات صفر شود یعنی :

$$x - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow AA_1 = x = \frac{a}{2}$$

یعنی باید A_1, B_1, C_1, D_1 را در وسط اضلاع مربع انتخاب کرد .

$$\text{جواب : } S_n = a^2 \quad n \rightarrow \infty$$

$$. \frac{\pi a^2}{4} ; \frac{2a\sqrt{2}\pi}{3} ; \frac{a\sqrt{2}}{3} \quad \text{جواب : } ۴۸۱$$

۴۸۲. طول ضلع اولین مربع محاطی که قطر دومین دایره است، برابر است

با $R\sqrt{2}$ و شعاع دایره دوم مساوی $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ می شود .

شعاع دایره سوم برابر است با :

$$\frac{R\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{2}$$

و شعاع دایره چهارم :

$$\frac{R}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{4} = \dots$$

و حد مجموع طول شعاعها :

$$R + \frac{R\sqrt{r}}{r} + \frac{R}{r} + \frac{R\sqrt{r}}{r^2} + \dots = R(1 + \sqrt{r})\sqrt{r}$$

وحد مجموع مساحت‌های دوایر :

$$\pi R^2 + \frac{\pi R^2}{r} + \frac{\pi R^2}{r^2} + \dots = r\pi R^2$$

۴۸۳: جواب :

$$V_n = a^2 h \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \dots + \frac{1}{r^n} + \dots \right) = a^2 h$$

$$V_m = \frac{\pi a^2 \sqrt{r}}{r(3\sqrt{r}-1)} ; V_k = \frac{r a^2 \sqrt{r}}{3\sqrt{r}-1} \quad \text{جواب : ۴۸۴}$$

$$۱/۵, ۴/۵, ۷/۵, ۱۲/۵ \quad \text{یا} \quad ۱۲, ۱۸, ۴۰, ۲ \quad \text{۴۸۵}$$

۴۸۶: بنا بر تعریف تصاعد هندسی :

$$u_1 : u_r = u_n : u_{n+1} \quad (n=2, 3, \dots)$$

در حالتی که تصاعد هندسی صعودی باشد، u_1 و u_{n+1} بترتیب بزرگترین و کوچکترین جمله تصاعد خواهد بود (و در حالتی که تصاعد هندسی نزولی باشد $u_{n+1} < u_1$).

در این صورت (باتوجه به نامساوی اقلیدس - مسئله شماره ۳۷۷).

$$u_{n+1} + u_1 > u_r + u_n ;$$

$$u_{n+1} > u_1 + u_r - u_1 .$$

$$u_r > u_r + (u_r - u_1)$$

$$u_s > u_r + (u_r - u_1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_{n+1} > u_n + (u_r - u_1)$$

$$u_{n+1} > u_r + (n-1)(u_r - u_1)$$

علاوه بر آن :

$$u_r + (n-1)(u_r - u_1) = a_r + (n-1)(a_r - a_1) = a_{n+1} ;$$

و چون داریم :

$$u_2 - u_1 = a_2 - a_1$$

خواهیم داشت :

$$u_{n+1} > a_{n+1}$$

۴۸۷. راهنمایی : داریم :

$$a_1 = \frac{x-1}{x} ; a_n = \frac{1}{x} ; n = x-1$$

$$S_n = \frac{x-1}{2} \quad \text{جواب :}$$

۴۸۸. برای محاسبه مجموع مربعات n عدد اولیه از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم :

$$3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 - x^3$$

اگر در این اتحاد بجای x بترتیب از ۱ تا n قرار دهیم و باهم جمع کنیم بدست می‌آید :

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n = (n+1)^3 - 1$$

و یا :

$$3S_2 + 3S_1 + n = (n+1)^3 - 1$$

که در آن S_1 و S_2 بترتیب مجموع n عدد متوالی و مجموع مربعات n عدد متوالی است. اگر در رابطه اخیر $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ قرار دهیم مقدار S_2 بدست می‌آید :

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{جواب :}$$

۴۸۹. برای محاسبه مجموع مکعبات n عدد اولیه از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم :

$$4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x+1)^4 - x^4$$

که اگر در آن بجای x مقادیر از ۱ تا n را قرار داده و باهم جمع کنیم ، بدست می آید :

$$4S_r + 6S_r + 4S_r + n = (n+1)^4 - 1$$

و با قرار دادن مقادیر S_r و S_r (مسئله قبل) مقدار S_r بدست می آید .

$$S_r = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{جواب :}$$

۴۹۰. راهنمایی: شبیه مسائل قبل با استفاده از اتحاد زیر ، مجموع مورد نظر بدست می آید :

$$x^5 - (x-1)^5 = 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \quad \text{*جواب :}$$

۴۹۱. طرفین رابطه (۱) را در a ضرب می کنیم :

$$aS_n = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \dots + na^n \quad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) بدست می آید :

$$(a-1)S_n = -(1+a+a^2+a^3+\dots+a^{n-1}) + na^n$$

$$(a-1)S_n = na^n - \frac{a^n - 1}{a - 1} \quad \text{و یا :}$$

و از آنجا مجموع مورد نظر بدست می آید .

$$S_n = \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n - 1}{(a-1)^2} \quad \text{جواب :}$$

۴۹۲. هر يك از كسرها را با توجه به رابطه زیر به تفاضل دو كسر ساده تبدیل می کنیم :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

در این صورت اگر مجموع (۱) را S_n فرض کنیم ، داریم :

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) .$$

وازنجا پس از ساده کردن جواب بدست می آید :

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

۴۹۳. طرفین تساوی را در x ضرب می کنیم :

$$x \cdot S_n = x^1 + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^{n+1}$$

$$S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$x \cdot S_n - S_n = -x - x^2 - x^3 - \dots - x^n + nx^{n+1}$$

$$(x-1)S_n = -\frac{x^{n+1}-x}{x-1} + nx^{n+1}$$

$$S_n = \frac{x[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1]}{(x-1)^2} \quad \text{جواب :}$$

۴۹۴. اگر $n = 2k$ عدد زوجی باشد ، داریم :

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 =$$

$$= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \dots + [(2k-1)^2 - (2k)^2] =$$

$$= -(1+2) - (3+4) - \dots - (2k-1+2k) =$$

$$= -(1+2+3+\dots+2k) = -\frac{2k(2k+1)}{2} = -\frac{n(n+1)}{2}$$

$$-\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{جواب : وقتی که } n \text{ عددی زوج باشد :}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{و وقتی که } n \text{ عددی فرد باشد :}$$

۴۹۵. جمله عمومی این مجموع را بصورت زیر تبدیل می کنیم :

$$u_k = \frac{k^2}{4k^2-1} = \frac{1}{16} \left[\frac{16k^2-1+1}{4k^2-1} \right] =$$

$$= \frac{1}{16} \left[(4k^2+1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \right]$$

که اگر بجای k از ۱ تا n قرار دهیم و جمع کنیم ، بدست می آید :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16} \left\{ [4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + n] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{16} \left[4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n + \frac{n}{2n+1} \right] = \\ &= \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)} \end{aligned}$$

۴۹۶. راهنمایی : پرانتزها را باز کنید :

$$S_n = (x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n}) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2n}} \right) - 2n$$

وسپس مجموعه‌های هر پرانتز را بدست آورید .

$$۱) \quad S_n = \frac{(x^{2n+2} + 1)(x^{2n} - 1)}{(x^2 - 1)x^{2n}} - 2n \quad \text{جواب:}$$

$$۲) \quad S'_n = \frac{x^{2(2n+1)} - 1}{(x^2 - 1)x^{2n}} + (2n - 1)$$

۴۹۸. فرض کنید m و n هر دو از ۱ تا ∞ تغییر کنند ، در این صورت داریم :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots \right) + \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) + \\ &+ \dots = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \end{aligned}$$

جواب : ۱

۴۹۹. اعداد را به ترتیب انتخاب کنیم (البته با توجه به شرط مسئله) مجموع ثابتی خواهند داشت که برابر است با مجموع اعداد واقع در روی قطر اصلی جدول .

درحقیقت ، اگر عددی مانند $3n+k$ را از جدول انتخاب کنیم ، این عدد در سطر سوم (سطر اول را صفر گرفته ایم) و در ستون k ام قرار دارد و چون از هر سطر و هر ستون باید یک عدد انتخاب شود ، مجموع آنها چنین خواهد بود :

$$(1+2+3+\dots+n) + (1 \times n + 2 \times n + 3 \times n + \dots + n^2) = \\ = 1 + (n+2) + (2n+3) + (3n+4) + \dots + n^2$$

و اینها هم اعداد واقع در روی قطر اصلی جدول هستند . اما این اعداد تشکیل یک تصاعد حسابی می دهند که در آن $d=n+1$ ، $a_1=1$ و $a_n=n^2$ و تعداد جملات مساوی n است .

باین ترتیب مجموع جملات از رابطه زیر مشخص می شود :

$$S = \frac{(1+n^2)n}{2}$$

۵۰۰. عبارت مفروض را می توان چنین نوشت :

$$\frac{1}{3^2} \times \frac{1}{5^4} \times \frac{1}{3^8} \times \frac{1}{5^{16}} \dots = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2n+1}} + \dots \\ \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots \right)$$

از طرف دیگر داریم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2n+1}} + \dots \right) = \frac{2}{3} ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots \right) = \frac{1}{3}$$

جواب : $\sqrt[3]{45}$

۱۰۵. معادلات مجهول القوه و معادلات لگاریتمی

۵۰۱. راه حل اول . اگر در اتحاد اصلی لگاریتمی زیر :

$$a^{\log_a N} = N$$

اگر از طرفین درمبنای b لگاریتم بگیریم ، بدست می آید :

$$\log_a N \cdot \log_b a = \log_b N ;$$

$$\frac{\log_b N}{\log_a N} = \log_b a \quad \text{واز آنجا :}$$

راه حل دوم . فرض می کنیم :

$$\log_b N = x ; \log_a N = y ;$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$b^x = N ; a^y = N$$

$$b^x = a^y \quad \text{واز آنجا :}$$

که اگر از طرفین آن درمبنای b لگاریتم بگیریم ، می شود :

$$x = y \log_b a \implies \frac{x}{y} = \log_b a$$

و اگر در رابطه اخیر بجای x و y مقادیرش را قرار دهیم ، همان نتیجه مورد نظر بدست می آید .

۵۰۲. راهنمایی : از مسئله قبل استفاده کنید و در نظر داشته باشید :

$$\log_b b = 1$$

۵۰۳. فرض می کنیم :

$$\log_a N = y \quad (۱)$$

$$a^y = N \quad \text{از آنجا بدست می آید :}$$

$$a^{ny} = N^n \quad \text{و یا :}$$

$$\log_a a^{ny} = \log_a N^n = y \quad (۲) \quad \text{واز آنجا :}$$

که باتوجه به روابط (۱) و (۲)، تساوی مجهول بدست می آید .

۵۰۴. راهنمایی : از رابطه مربوط به مسئله ۵۰۱ استفاده کنید .

۵۰۵. راهنمایی : با استفاده از رابطه مسئله ۵۰۱ و در نظر گرفتن :

$$b=10 ; N=x ; a=e$$

رابطه مورد نظر بدست می آید $(Lx = \log_e x \cdot \log x = \log_{10} x)$.

۵۰۶. داریم : $\log 10 = \log 5 + \log 2$

جواب : $\log 5 = 0.699 \dots$

۵۰۷. جواب : $\log 125 = 2.097 \dots$

۵۰۸. راهنمایی : از رابطه مسئله شماره ۵۰۳ استفاده کنید .

جواب : $\log_8 125 = \log_2 5$

۵۰۹. داریم :

$$\log_6 16 = \frac{\log_{12} 16}{\log_{12} 6} = \frac{\log_{12} (2^4)}{\log_{12} \left(\frac{12}{2}\right)} = \frac{4 \log_{12} 2}{1 - \log_{12} 2} = \frac{4a}{1-a}$$

۵۱۰. میتوان نوشت :

$$\log_2 5 = \frac{\log_6 5}{\log_6 2} = \frac{b}{1-a}$$

زیرا داریم .

$$\log_6 2 = \log_6 \left(\frac{6}{3}\right) = 1 - \log_6 3$$

جواب : $\frac{b}{1-a}$

۵۱۱. با توجه به رابطه $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ بدست می آید :

$$\log_{25} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{\log_{14} \left(\frac{14^2}{7}\right)}{\log_{14} 35} = \frac{2 \log_{14} 14 \log_{14} 7}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5}$$

جواب : $\frac{2-a}{a+b}$

۵۱۲. داریم :

$$\log_7 2 \times \log_4 3 \dots \log_{10} 9 = \frac{\log 2}{\log 7} \cdot \frac{\log 3}{\log 4} \dots \frac{\log 9}{\log 10} = \log 2$$

۵۱۳. ۲ داریم :

$$343^1 - 2 \log_{49} 13 = 7^3 [1 - \log_{7^2} (13^2)] =$$

$$= 7^{3 \log_7 \frac{7}{13}} = 7^{\log_7 \left(\frac{7^3}{13^3} \right)} = \frac{7^3}{13^3} :$$

$$\left(\frac{7}{13} \right)^3 \quad (\text{جواب : } 1 : 3 : 2)$$

۵۱۵. داریم :

$$\log_{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{n} \right) = -\log_{\frac{1}{m}} n = \frac{-1}{\log_n \frac{1}{m}} = \frac{1}{\log_n m} = \log_m n$$

۵۱۶. داریم :

$$a^p = x ; b^q = x ; (abc)^r = x ;$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$a = x^{\frac{1}{p}} ; b = x^{\frac{1}{q}} ; abc = x^{\frac{1}{r}} .$$

$$ab = x^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} ; c = x^{\frac{1}{r}} : ab = x^{\frac{1}{r}} : x^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}} = x^{\frac{pq - r(p+q)}{rpq}}$$

و اگر از طرفین رابطه اخیر درمبنای c لگاریتم بگیریم ، بدست می آید .

$$\frac{pq - r(p+q)}{rpq} \cdot \log_c x = \log_c c .$$

$$\log_c x = \frac{rpq}{pq - r(p+q)} \quad \text{جواب :}$$

۵۱۷. چون $\log_{ab} a = n$ می باشد . داریم :

$$(ab)^n = a \Rightarrow b = \frac{\sqrt[n]{a}}{a}$$

واگر از طرفین رابطه اخیر لگاریتم بگیریم ، بدست می آید :

$$\log_{ab} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{n} \log_{ab} a - \frac{1}{n} \log_{ab} b =$$

$$= \frac{n}{n} - \frac{1}{n} \log_{ab} \frac{\sqrt[n]{a}}{a} = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \log_{ab} a - \log_{ab} a \right) = \frac{5n-3}{6}$$

۵۱۸. جواب : ۱

۵۱۹. فرض می کنیم :

$$-\log_3 \log_3 \sqrt[n]{\sqrt[n]{\dots \sqrt[n]{3}}} = z ;$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$\log_3 \sqrt[n]{\sqrt[n]{\dots \sqrt[n]{3}}} = 3^{-z} \Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[n]{\dots \sqrt[n]{3}}} = 3^{3^{-z}}$$

$$3 \left(\frac{1}{3} \right)^n = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^z \Rightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^n = \left(\frac{1}{3} \right)^z \Rightarrow z = n$$

۵۲۰. طبق رابطه ای که در مسئله شماره ۵۰۲ بدست آوردیم ، داریم :

$$\frac{1}{\log_a N} = \log_N a ;$$

$$\frac{1}{\log_{a^2} N} = \log_N a^2 = 2 \log_N a :$$

.....

$$\frac{1}{\log_{a^5} N} = \log_N a^5 = 5 \log_N a$$

و از جمع این روابط به رابطه مطلوب می رسیم

۵۲۱. داریم :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} x} = \\ & = \log_x a_1 + \log_x a_2 + \dots + \log_x a_n = \log_x (a_1 a_2 \dots a_n) = \\ & = \frac{1}{\log_{a_1 a_2 \dots a_n} x} \end{aligned}$$

۵۲۲. داریم :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_{abc} N} &= \log_N (abc) = \log_N a + \log_N b + \log_N c = \\ &= \frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_b N} + \frac{1}{\log_c N} = \\ &= \frac{\log_b N \cdot \log_c N + \log_a N \cdot \log_c N + \log_a N \cdot \log_b N}{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N} \end{aligned}$$

و از آنجا بسادگی صحت رابطه مطلوب ثابت می شود .

۵۲۳. به حل مسئله ۵۱۲ مراجعه کنید .

۵۲۴. به حل مسئله شماره ۵۲۱ مراجعه کنید .

۵۲۶. داریم :

$$a^x = c^x - b^x = (c-b)(c+b)$$

اگر از طرفین این رابطه ، ابتدا در مبنای $c+b$ و سپس در مبنای $c-b$ لگاریتم بگیریم ، خواهیم داشت :

$$x \log_{c+b} a = \log_{c+b} (c-b) + 1$$

$$x \log_{c-b} a = \log_{c-b} (c+b) + 1$$

اکنون اگر این دو رابطه را در هم ضرب کنیم ، با توجه به رابطه :

$$\log_{c-b} (c+b) \cdot \log_{c+b} (c-b) = 1$$

بدست می آید :

$$x \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a = \frac{1}{x} [x \log_{c+b} (c-b) + \log_{c-b} (c+b) + x] =$$

$$= \frac{1}{r} (2 \log_{c+b} a - 1 + 2 \log_{c-b} a - 1 + 2) = \log_{c+b} a + \log_{c-b} a ;$$

۵۲۷. اگر از طرفین دو رابطه فرض درمبنای ۱۰ لگاریتم بگیریم، داریم:

$$\log y = \frac{1}{1 - \log x} ; \quad \log z = \frac{1}{1 - \log y} ;$$

واز آنجا :

$$\log x = 1 - \frac{1}{\log y} = \dots = \frac{1}{1 - \log z}$$

ودر نتیجه :

$$z = 1, \frac{1}{1 - \log z}$$

(b) معادلات مجهول القوه

۵۲۸. بترتیب داریم :

$$4^x(4+1) = 320 \Rightarrow 4^x \times 5 = 320 \Rightarrow 4^x = 4^3$$

جواب : $x = 3$

۵۲۹. داریم :

$$3^x(2 \times 3 - 4 \times 3 - 2) = 450 \Rightarrow 3^x = 81$$

جواب : $x = 4$

۵۳۰. جواب : $x = 3$

$$10 \times 2^x - 2^{2x} - 16 = 0 \quad : \quad ۵۳۱. \text{ داریم :}$$

که با فرض $2^x = z$ معادله درجه دوم زیر را خواهیم داشت :

$$z^2 - 10z + 16 = 0 ;$$

واز آنجا :

$$z_1 = 8 ; \quad z_2 = 2$$

$$2^x = 2^3 : \quad 2^x = 2$$

یعنی :

$$x_2 = 1 ; \quad x_1 = 3 \quad : \quad \text{جواب}$$

۵۳۲. داریم :

$$5^{2x} - 20 \times 5^x - 125 = 0$$

و با فرض $5^x = z$ معادله فوق بصورت زیر درمی آید :

$$z^2 - 20z - 125 = 0 \Rightarrow z_1 = 25 (z_2 = -5)$$

جواب : $x = 2$

۵۳۳. معادله را می توان بصورت زیر نوشت :

$$3 \times 3^{2x} - 29 \times 3^x + 18 = 0$$

و با فرض $3^x = z$ خواهیم داشت :

$$3z^2 - 29z + 18 = 0 \Rightarrow z_1 = 9 ; z_2 = \frac{2}{3}$$

$$3^x = \frac{2}{3} \text{ و } 3^x = 3^2 \quad \text{یعنی :}$$

$$x_2 = \frac{\log 2}{\log 3} - 1 , x_1 = 2 \quad \text{جواب :}$$

$$6 \times 3^x = 5 \times 3^{2x-4} - 81 = 0 \quad \text{۵۳۴. داریم :}$$

$$81 \times 6 \times 3^x - 5 \times 3^{2x} - 81^2 = 0 \quad \text{یا :}$$

$$5 \times 3^{2x} - 486 \times 3^x + 6561 = 0 \quad \text{یعنی :}$$

و با فرض $3^x = z$ خواهیم داشت :

$$5z^2 - 486z + 6561 = 0$$

$$z_1 = 81 ; z_2 = \frac{81}{5} \quad \text{و از آنجا :}$$

$$3^x = \frac{81}{5} , 3^x = 81 \quad \text{بنابراین :}$$

$$x_2 = 4 - \frac{\log 5}{\log 3} , x_1 = 4 \quad \text{جواب :}$$

$$x_2 = \frac{\log 5}{\log 7} , x_1 = 0 \quad \text{۵۳۵. جواب :}$$

۵۳۶. معادله را می توان بصورت زیر درآورد :

$$۳۴ \times ۷^x - ۳۴ \times ۵^{۲x} = ۰ ;$$

$$۷^x - ۵^{۲x} = ۰ \quad \text{یا:}$$

$$۷^x = ۲۵^x \Rightarrow \left(\frac{۷}{۲۵}\right)^x = ۱ \quad \text{یعنی:}$$

$$x = ۰ \quad \text{جواب:}$$

$$۳ \times ۴^{۴x} - ۹ \times ۴^{۲x} + ۴ = ۰ \quad \text{داریم:}$$

و با فرض $۴^{۲x} = z$ بدست می آید :

$$۲z^2 - ۹z + ۴ = ۰ \Rightarrow z_1 = ۴ ; z_2 = \frac{1}{۲}$$

$$۴^{۲x} = \frac{1}{۲} \quad \text{و} \quad ۴^{۲x} = ۴ \quad \text{یعنی:}$$

$$x_2 = -\frac{1}{۴} , x_1 = \frac{1}{۲} \quad \text{جواب:}$$

$$۵۳۸. \text{ جواب: } x_1 = ۳ , x_2 = \frac{\log ۳}{\log ۲} - ۱$$

$$۵۳۹. \text{ جواب: } x = ۲$$

$$۵۴۰. \text{ بترتیب داریم:}$$

$$۲^{۲x}(1 + ۲^{-1}) = ۳^{x - \frac{1}{۲}}(۳ + ۱) ;$$

$$۲^{۲x} \times ۳ = ۳^{x - \frac{1}{۲}} \times ۸ \Rightarrow ۲^{۲x - ۲} = ۳^{x - \frac{۳}{۲}} ;$$

$$۲^{۲x - ۲} = (\sqrt{۳})^{۲x - ۲} \Rightarrow \left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)^{۲x - ۲} = ۱ ;$$

$$۲x - ۳ = ۰ \quad \text{و از آنجا:}$$

$$x = \frac{۳}{۲} \quad \text{جواب:}$$

$$۵۴۱. \text{ داریم:}$$

$$5^{2x} \times 5^{-2} - 2 \times 5^x \times 5^{-2} - 3 = 0 ;$$

$$5^{2x} - 10 \times 5^x - 375 = 0$$

و با فرض $5^x = z$ معادله درجه دوم زیر را خواهیم داشت :

$$z^2 - 10z - 375 = 0 \Rightarrow z_1 = 25 (z_2 = -15)$$

جواب : $x = 2$

۵۴۲. سمت راست معادله، مجموع بی نهایت جمله از تصاعد هندسی است که در آن :

$$u_1 = 45/5 ; q = 22/75 : 45/5 = 0/5 ;$$

$$S = \frac{45/5}{1 - 0/5} = 91$$

و بنابراین معادله مفروض بصورت زیر درمی آید :

$$3^{x-5} + 3^{x-7} + 3^{x-9} = 91 ;$$

$$3^{x-9}(3^4 + 3^2 + 1) = 91 \quad \text{یا :}$$

$$3^{x-9} = 1 \Rightarrow x - 9 = 0 \quad \text{یعنی :}$$

جواب : $x = 9$

$$. x_2 = 16 , x_1 = 4 \quad \text{۵۴۳. جواب :}$$

$$2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 3 ; \quad \text{۵۴۴. داریم :}$$

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 1 \quad \text{و بنابراین :}$$

با حل این معادله گنگ جوابهای مطلوب بدست می آید .

$$x_2 = 1 , x_1 = 0 \quad \text{جواب :}$$

۵۴۵. داریم :

$$2\sqrt[2]{x-2} - 10 \times 2\sqrt[2]{x-2} + 16 = 0$$

که با فرض $2\sqrt[2]{x-2} = z$ بدست می آید :

$$z^2 - 10z + 16 = 0$$

$$z_1 = 2 \Rightarrow 2\sqrt[2]{x-2} = 2 \quad \text{و از آنجا :}$$

$$z_7 = 8 \Rightarrow 2^{\sqrt{x-2}} = 8$$

$$x_7 = 11, \quad x_1 = 3 \quad \text{: جواب}$$

۵۴۶. داریم :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{4} \quad \text{: جواب}$$

۵۴۷. داریم :

$$5^{2(1+2+2+\dots+x)} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-28}$$

$$5^{x(1+x)} = 5^{56} \Rightarrow x(x+1) = 56 \quad \text{: يا}$$

$$x_1 = 7 (x_7 = -8) \quad \text{: جواب}$$

$$x = 9 \quad \text{: جواب ۵۴۸}$$

۵۴۹. داریم :

$$\frac{1}{8} \times 4^{2x-2} = 8^x \times 2^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow 2^{4x-9} = 2^{3x-\frac{x}{2}}$$

$$4x - 9 = 3x - \frac{x}{2} \quad \text{بنابراین :}$$

$$x = 6 \quad \text{: جواب}$$

۵۵۰. داریم :

$$2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} - 5 \times 2^{-1} \times 2^{x+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0$$

واگر فرض کنیم $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = z$ خواهیم داشت :

$$2z^2 - 5z - 12 = 0$$

$$z_1 = 4 \left(z_7 = -\frac{3}{2} \right) \quad \text{واز آنجا :}$$

بنابراین :

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2 \Rightarrow x + \sqrt{x^2-2} = 2$$

جواب : $x = \frac{3}{2}$

۵۵۱. باتوجه به تساوی $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ معادله بصورت زیر در میآید :

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + \frac{1}{(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x} = 2$$

که اگر فرض کنیم $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = z$ معادله زیر را خواهیم داشت :

$$z^2 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

و بنابراین دو معادله زیر را خواهیم داشت :

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2 - \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2 + \sqrt{3}$$

که باحل این معادلات ، مقدار x بدست می آید .

جواب : $x_1 = 2$ ، $x_2 = -2$.

۵۵۲. معادله مفروض را بترتیب بصورت زیر می نویسم :

$$2^{2x} + 3^x \times 2^x = 3^{2x}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = 0$$

که با فرض $\left(\frac{3}{2}\right)^x = z$ خواهیم داشت :

$$z^2 - z - 1 = 0 ;$$

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

وازا آنجا :

$$\left(\frac{r}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log \frac{r}{2}}$$

$$x = \frac{\log(1+\sqrt{5}) - \log 2}{\log 3 - \log 2} \quad \text{جواب :}$$

۵۵۳. راهنمایی : بسادگی دیده می شود که :

$$\left(2^x - \frac{1}{2^x}\right)^2 = 2^{2x} - \frac{1}{2^{2x}} - 2\left(2^x - \frac{1}{2^x}\right).$$

$$x = 1 \quad \text{جواب :}$$

(c) معادلات لگاریتمی

$$\log\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log \frac{1}{2x} ; \quad \text{۵۵۴. داریم :}$$

$$\frac{1}{2} + x = \frac{1}{2x} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{یعنی :}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} (x_2 = -1) \quad \text{وازانجا :}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{جواب :}$$

$$x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_1 = 3 \quad \text{۵۵۵. جواب :}$$

۵۵۶. داریم :

$$\log(x-9)(2x-1) = \log 100 ;$$

$$(x-9)(2x-1) = 100 \Rightarrow 2x^2 - 19x - 91 = 0$$

$$x = 13 \quad \text{جواب :}$$

۵۵۷. بترتیب داریم :

$$\log(\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{2x-3}) = \log\left(\frac{30}{10}\right);$$

$$\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{2x-3} = 3 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 6 = 0$$

جواب : $x=6$

۵۵۸. داریم :

$$\log\left(x - \frac{1}{9}\right) = \log\left(\frac{1}{9}\right)^2 \Rightarrow x - \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$$

جواب : $x = \frac{11}{12}$

۵۵۹. اگر از طرفین معادله لگاریتم بگیریم ، داریم :

$$\log^2 x - \log x - 2 = 0$$

$$\log x = 2 \Rightarrow x_1 = 10^2 = 100$$

$$\log x = -1 \Rightarrow x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

۵۶۰. جواب : $x_1 = \frac{1}{10}$ ، $x_2 = 100$

۵۶۱. جواب : $x_1 = \frac{1}{10}$ ، $x_2 = 1000$

۵۶۲. جواب : $x_1 = \frac{1}{100}$ ، $x_2 = 100$

۵۶۳. جواب : $x_1 = 10$ ، $x_2 = 10^5$

۵۶۴. از طرفین معادله درمبنای x لگاریتم می گیریم :

$$2 \log_x 10 \times \log_x x = \log_x 10 + \log_x x \Rightarrow \log_x 10 = 1$$

جواب : $x = 10$

۵۶۵. داریم :

$$\frac{2}{\log_r x} = 2 - 6 \Rightarrow \frac{2}{\log_r x} = -6 \Rightarrow \log_r x = -\frac{1}{3}$$

جواب : $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

۵۶۶. اگر از طرفین معادله درمبنای a لگاریتم بگیریم ، داریم :

$$(\log_a x)^2 - \log_a x - 2 = 0$$

$$\log_a x = 2 ; \log_a x = -1$$

جواب : $x_1 = \frac{1}{a}$ ، $x_2 = a^2$

۵۶۷. معادله را می توان بصورت زیر نوشت :

$$2 \log^2 x - 1 / 5 \log^2 x - 5 / 5 = 0$$

$$2 \log^2 x - 2 \log^2 x - 1 = 0 \quad \text{یا :}$$

$$\log x_2 = -1 , \log x_1 = 1 \quad \text{وازا آنجا :}$$

جواب : $x_1 = 10$ ، $x_2 = \frac{1}{10}$

۵۶۸. می توان نوشت :

$$x^2 - 11x + 22 = 5^2 ;$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0 \quad \text{یعنی :}$$

جواب : $x_1 = 2$ ، $x_2 = 9$

۵۶۹. داریم :

$$\log (\sqrt[10]{2x^2 - 14/5x}) = \log 1$$

$$\sqrt[10]{2x^2 - 14/5x} = 1 \Rightarrow 2 \frac{x^2 - 14/5x}{10} = 2 - 2$$

$$x^2 - 14/5x + 30 = 0 \quad \text{وازا آنجا :}$$

جواب : $x_1 = 2/5$ ، $x_2 = 12$

۵۷۰. جواب : $x_1 = 4$ ، $x_2 = 36$

۵۷۱: اگر معادله را گویا کنیم، چنین می‌شود:

$$۱۶ - ۸ \log x + \log^2 x = ۹ \log x$$

$$\log^2 x - ۱۷ \log x + ۱۶ = ۰ \quad \text{یا:}$$

$$\log x = ۱ \quad (\log x = ۱۶) \quad \text{وازا اینجا:}$$

$$x = ۱۰ \quad \text{جواب:}$$

۵۷۲: داریم:

$$\frac{1}{3} \log(۲۷۱ + ۳\sqrt[3]{x}) = ۲ - \log ۱۰ = ۱$$

$$\log(۲۷۱ + ۳\sqrt[3]{x}) = ۳ \Rightarrow ۲۷۱ + ۳\sqrt[3]{x} = ۱۰^3$$

$$۳\sqrt[3]{x} = ۷۲۹ = ۳^6 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = ۶$$

$$x = ۱۸ \quad \text{جواب:}$$

$$x = ۳/۲ \times ۵\frac{۲}{۳} \quad \text{۵۷۳: جواب:}$$

$$x = ۵ \quad \text{۵۷۴: جواب:}$$

$$x_2 = ۴, \quad x_1 = ۲ \quad \text{۵۷۵: جواب:}$$

۵۷۶: با توجه به رابطه واضح زیر:

$$\log_x ۲ = \log_{x^2} ۴ = \frac{1}{\log_4 x^2}$$

معادله مفروض را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\log_4 (x + ۱۲) = \log_4 x^2$$

$$x^2 - x - ۱۲ = 0 \Rightarrow x_1 = ۴ (x_2 < 0)$$

$$x = \frac{1}{9} \quad \text{۵۷۷: جواب:}$$

۵۷۸: با الگاریتم گرفتن از طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\log x} \cdot \log x = x^4 \cdot \log ۱۰$$

$$x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 + 1 \neq 0 ; x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

و بسادگی روشن می شود که x_1 و x_2 در معادله صدق نمی کنند و بنابراین معادله مفروض جواب ندارد.

۵۷۹. راهنمایی : داریم :

$$\log_2 \frac{3^5(x-2)\sqrt{8}}{27^3} = \frac{3}{2} \Rightarrow (x-2) \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

جواب : $x = 2$

۵۸۰. جواب : $x = -3$

۵۸۱. جواب : $x = 9$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad : \text{۵۸۲. واضح است که}$$

بنابراین معادله مفروض بصورت زیر درمی آید :

$$\frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x = 2/5 ;$$

$$2 \log_2^2 x - 5 \log_2 x + 2 = 0$$

$$x_2 = \sqrt{2} , x_1 = 2 \quad : \text{جواب}$$

۵۸۳. بترتیب داریم :

$$\log(35 - x^2) = \log(5 - x)^2 ;$$

$$35 - x^2 = (5 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_2 = 3 , x_1 = 2 \quad : \text{جواب}$$

۵۸۴. اگر از طرفین تساوی لگاریتم بگیریم داریم :

$$\frac{\log x + 7}{7} \log x = \log x + 1 ;$$

$$\log^2 x + 3 \log x - 4 = 0$$

جواب : $x_7 = 0.70001$ ، $x_1 = 10$:
 ۵۸۵. راهنمایی: طرفین معادله را مجذور می‌کنیم و از رابطه زیر استفاده می‌کنیم :

$$a^{\log_a N} = N$$

$$x = \sqrt{26} \quad \text{جواب :}$$

۵۸۶. از طرفین معادله لگاریتم می‌گیریم در اینصورت به ترتیب داریم :

$$(\log_5 x - 1) \cdot \frac{1}{4} \log_5 x = 1$$

$$\log_5^2 x - \log_5 x - 2 = 0$$

$$x_7 = 25 \quad , \quad x_1 = 0.2 \quad \text{جواب :}$$

۵۸۷. داریم :

$$\log(x^2 + 21) - 1 = \log x$$

$$\log(x^2 + 21) - \log 10 = \log x \Rightarrow \frac{x^2 + 21}{10} = x$$

$$x_7 = 7 \quad , \quad x_1 = 3 \quad \text{جواب :}$$

۵۸۸. داریم :

$$\log_7 \log_7 x = \Pi^\circ = 1 \Rightarrow \log_7 x = 2 \Rightarrow x = 49$$

۵۸۹. داریم :

$$2 \log_{10} \frac{2}{10} + \log(\Delta \sqrt{x} + 1) = \log \frac{1 + \Delta \sqrt{x}}{\Delta \sqrt{x-1}}$$

$$\log \Delta^2 = \log \Delta \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2$$

$$x = 9 \quad \text{جواب :}$$

۵۹۰. داریم :

$$\log 4 + \log 3^{1 + \frac{1}{2x}} = \log(\sqrt[2]{x} + 27)$$

$$4 \times 3 \times 3^{\frac{1}{2}x} = 3^{\frac{1}{x}} + 27$$

$$3^{\frac{1}{x}} - 12 \times 3^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{2} + 27 = 0$$

و اگر $3^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{2} = z$ فرض کنیم $3^{\frac{1}{x}} = z^2$ می شود و معادله ای بصورت زیر خواهیم داشت :

$$z^2 - 12z + 27 = 0 \Rightarrow z_1 = 3 ; z_2 = 9$$

جواب : $x_1 = 0.5$ ، $x_2 = 0.25$
۵۹۱. داریم :

$$\frac{1}{2} \log_x 5 + \log_x 5 + \log_x x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \log_x^2 5$$

$$\log_x^2 5 - 6 \log_x 5 + 5 = 0 \quad \text{یا :}$$

$$\log_x 5 = 1 \Rightarrow x = 5 ; \quad \text{و از آنجا :}$$

$$\log_x 5 = 5 \Rightarrow x^5 = 5 ;$$

$$\text{جواب : } x_1 = 5 , x_2 = \sqrt[5]{5}$$

۵۹۲. بترتیب داریم :

$$\log_a^2 x^2 - \log_a^2 x^2 + \log_a^2 x = \frac{3}{4} ;$$

$$\log_a^2 \frac{x^4 \cdot x}{x^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 = a^{\frac{3}{4}}$$

جواب : $x = a$

۵۹۳. داریم :

$$\frac{\log_7 x - 1}{\log_7 x - 1} - \log_7 x + \log_7^2 x = 3$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

جواب : $x_1 = \frac{1}{2}$ ، $x_2 = 4$

۵۹۴. معادله مفروض را می توان بصورت معادله زیر نوشت :

$$2x^{\log x} - 5x^{\log x} + 3 = 0$$

و از آنجا معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$x^{\log x} = 1 ; x^{\log x} = \frac{3}{2}$$

از حل معادله اول بدست می آید :

$$\log^2 x = 0 \Rightarrow x = 1$$

و از حل معادله دوم :

$$\log^2 x = \log \frac{3}{2} \Rightarrow \log x = \pm \sqrt{\log \frac{3}{2}}$$

$$x_{1,2} = 10^{\pm \sqrt{\log \frac{3}{2}}} ; x_1 = 1$$

۵۹۵. داریم :

$$5^{\log x} + 5^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} + 3^{\log x - 1} ;$$

$$\frac{6}{5} \cdot 5^{\log x} = \frac{10}{3} \cdot 3^{\log x} \Rightarrow 5^{\log x} \cdot 3^2 = 3^{\log x} \cdot 5^2 ;$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\log x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

۵۹۶. اگر سمت راست معادله را ساده کنیم بصورت زیر درمی آید :

$$x^{\log^2 x + \log x^2 + 2} = x$$

از طرفین تساوی لگاریتم می گیریم ، بدست می آید :

$$(\log^2 x + \log x^2 + 3) \log x = \log x ;$$

$$(\log^2 x + 3 \log x + 2) \log x = 0 ;$$

$$\log x = 0 \Rightarrow x = 1 ;$$

$$\log^2 x + 3 \log x + 2 = 0 \Rightarrow \log x = -2 \text{ و } -1$$

$$x_1 = 1 ; x_2 = 0.01 ; x_3 = 0.01 ;$$

۵۹۷. پس از عملیات مقدماتی خواهیم داشت :

$$2^{12} \cdot x^{2 \log_2^2 x - 8} = x^6$$

اگر از طرفین تساوی لگاریتم بگیریم ، پس از ساده کردن به معادله درجه سوم زیر می‌رسیم :

$$\log_2^2 x - 7 \log_2 x + 6 = 0$$

اگر $\log_2 x = z$ فرض کنیم ، داریم :

$$z^2 - 7z + 6 = z^2 - z - 6z + 6 =$$

$$= (z - 1)(z^2 + z - 6) = 0$$

$$z_1 = 1 ; \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$z_2 = -3 ; \log_2 x = -3 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

$$z_3 = 2 ; \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$$

۵۹۸. بترتیب داریم :

$$\log_4 x \left(\frac{\log_2 x}{\log_4 x} + \frac{\log_8 x}{\log_4 x} + 1 \right) = 1 ;$$

$$\log_4 x (\log_2 4 + \log_8 4 + 1) = 1 ;$$

$$\log_4 x (2 + \log_8 4) = 1 \Rightarrow \log_4 x = \frac{1}{2 + \log_8 4}$$

$$x = 2^{\frac{2}{2+2\log_2 2}} = 2^{2\log_{108} 2} \quad \text{جواب :}$$

۵۹۹. داریم :

$$\log_{16} x + \log_{16} x^2 + \log_{16} x^4 = 7$$

$$\log_{16} (x^7) = 7 \Rightarrow x^7 = 16^7$$

جواب : $x = 16$

۶۰۰. اگر از طرفین تساوی درمبنای ۱۰ لگاریتم بگیریم، داریم :

$$\log(\log \log x) = \frac{1}{4} [\log(m-n)\log(m+n) - \log(m+n)\log(m-n)] = 0$$

$$\log \log x = 1 \Rightarrow \log x = 10 \quad \text{و بنابراین :}$$

$$x = 10^{10} \quad \text{جواب :}$$

۶۰۱. داریم :

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1 + \log_a x) + \frac{1}{4}(1 + \log_x a)} + \sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x - 1) + \frac{1}{4}(\log_x a - 1)} = a$$

واضح است که $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$ که با استفاده از آن خواهیم داشت :

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1 + \log_a x) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\log_a x}\right)} + \sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x - 1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\log_a x} - 1\right)} = a$$

$$\sqrt{\frac{(1 + \log_a x)^2}{4 \log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x - 1)^2}{4 \log_a x}} = a \quad (۱) \quad \text{و یا :}$$

اگر $\log_a x > 1$ باشد $a > 1$ خواهد بود و معادله (۱) بصورت زیر درمی آید:

$$\log_a x = a \sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = a^2 \Rightarrow x = a^{a^2}$$

و اگر $0 < \log_a x \leq 1$ باشد، $a > 1$ و معادله (۱) چنین می شود:

$$\frac{1 + \log_a x}{\sqrt[4]{\log_a x}} - \frac{\log_a x - 1}{\sqrt[2]{\log_a x}} = a ;$$

و از آنجا:

$$1 = a \sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{a^2} \Rightarrow x = a^{\frac{1}{a^2}}$$

$$x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}, x_1 = a^{a^2} : \text{جواب}$$

۶۰۲. داریم:

$$\log(kx) = \log(x+1)^2 \Rightarrow kx = (x+1)^2$$

$$x^2 - (k-2)x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{k-2 \pm \sqrt{k(k-4)}}{2}$$

برای اینکه ریشه های این معادله درجه دوم حقیقی باشند، لازم و کافی است که $k(k-4) \geq 0$ باشد و این نامساوی وقتی برقرار است که $k \geq 4$ یا $k \leq 0$ باشد.

۱. اگر $k > 4$ باشد، معادله دو ریشه مختلف و مثبت دارد.

۲. اگر $k = 4$ باشد، معادله درجه دوم دو ریشه مساوی و مثبت دارد: $x_{1,2} = 1$

۳. اگر $k \leq 0$ باشد، معادله دو ریشه مختلف منفی خواهد داشت، زیرا طبق روابط ویت داریم:

$$x_1 + x_2 = k - 2 < 0 ; x_1 x_2 = 1$$

و از این دو رابطه نتیجه می شود که هر دو ریشه معادله منفی و از لحاظ مقدار عکس یکدیگرند.

با این ترتیب تنها با $k=4$ يك جواب مثبت $x=1$ را دارد .

۶۰۳. داریم :

$$\frac{2}{\log x} + \frac{3}{(\log x)^2} + \frac{4}{(\log x)^3} + \dots + \frac{n}{(\log x)^{n-1}} + \frac{n+1}{(\log x)^n} + \dots = 8 ; (1)$$

و یا : (با توجه به $\log x > 1$) داریم :

$$\frac{2}{(\log x)^2} + \frac{3}{(\log x)^3} + \frac{4}{(\log x)^4} + \dots + \frac{n+1}{(\log x)^{n+1}} + \dots = \frac{8}{\log x} (2)$$

اگر رابطه (۲) از رابطه (۱) کم کنیم ، بدست می آید :

$$\frac{1}{(\log x)^2} + \frac{1}{(\log x)^3} + \frac{1}{(\log x)^4} + \dots + \frac{1}{(\log x)^n} + \dots = 8 - \frac{10}{\log x}$$

بنابراین :

$$\frac{\frac{1}{(\log x)^2}}{1 - \frac{1}{\log x}} = 8 - \frac{10}{\log x} \Rightarrow \log x = \frac{3}{2} \left(\log x = \frac{3}{4} \right)$$

جواب : $x = 10\sqrt{10}$

(d) دستگاه معادلات

۶۰۴. معادلات مفروض را بصورت زیر می نویسیم :

$$2^x(3 - 2^y) = -2$$

$$2^x(10 - 2^y \cdot 2^{-1}) = 16$$

از تقسیم این دو معادله بر یکدیگر ، پس از ساده کردن بدست می آید : $2^y = 4$

و سپس x بدست می آید .

جواب : $x=1$; $y=2$.

۶۰۵. از معادله دوم بدست می آوریم :

$$x+y=3 \times 2^{x-y} \quad (A)$$

اکنون اگر مقدار $x+y$ را در معادله اول قرار دهیم ، می شود :

$$\sqrt[x-y]{3 \times 2^{x-y}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow 3^{\frac{1}{x-y}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{2} \Rightarrow x-y=2$$

و در نتیجه از معادله (A) بدست می آید :

$$x+y=12$$

جواب : $x=7$ ، $y=5$

$$x=y=\frac{1}{p} \quad \text{جواب ۶۰۶}$$

۶۰۷. اگر دو معادله دستگاه را با هم جمع کنیم، بدست می آید :

$$\log x = 6 \Rightarrow x = 10^6$$

و دیگر بسادگی بدست می آید :

$$\log y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{10}$$

$$\text{جواب ۶۰۸ : } y = 10^{\frac{2a-b}{4}} , x = 10^{\frac{2a+b}{4}}$$

۶۰۹. از معادله اول دستگاه بدست می آید :

$$xy=2$$

و بنابراین دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{array} \right| \quad \text{جواب :}$$

$$610. \text{ جواب : } \begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 20 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = 20 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

611. از معادله دوم دستگاه $y = 5 - x$ بدست می آید که اگر در معادله اول دستگاه قرار دهیم :

$$2^x + 2^{5-x} = 12 \Rightarrow 2^{2x} - 12 \times 2^x + 32 = 0$$

$$\text{و از آنجا : } 2^x = 4, 2^x = 8$$

$$\text{جواب : } \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

612. اگر طرفین معادله دوم دستگاه را در ۲ ضرب کنیم و سپس دو معادله را از هم کم نمائیم چنین می شود :

$$8^x = 2 \times 2^x \Rightarrow 2^{3x} = 2^{x+1} \Rightarrow 3x = x + 1$$

$$\text{جواب : } x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

613. اگر از طرفین معادلات لگاریتم بگیریم ، بدست می آید :

$$\begin{cases} (y+1) \log x = 3 \log 3 \\ (2y-5) \log x = -\log 3 \end{cases}$$

$$\text{و از آنجا : } \frac{y+1}{2y-5} = -3$$

$$\text{جواب : } x = 3, y = 2$$

614. معادله اول دستگاه را باین صورت می نویسیم :

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 77$$

از تقسیم طرفین این معادله بر طرفین معادله دوم دستگاه به معادله ای میرسیم که با معادله دوم رویهم دستگاه زیر را خواهند داد :

$$\begin{cases} \frac{x}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 11 \\ \frac{x}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x_2 = 4 \\ y_2 = -\sqrt{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 = 4 \\ y_1 = \sqrt{2} \end{vmatrix} \quad \text{جواب:}$$

$$x = y^{\frac{x}{y}} \quad \text{۶۱۵. بدست می آوریم:}$$

و بنا بر این خواهیم داشت:

$$x^m = y^{\frac{mx}{y}} \quad (۱)$$

بامقایسه این معادله با معادله دوم دستگاه بدست می آید:

$$y^n = y^{\frac{mx}{y}}$$

و از آنجا یا $y=1$ و یا $\frac{mx}{y} = n$ می شود یعنی:

$$y = \frac{mx}{n} \quad (۲)$$

اگر $y=1$ باشد $z=1$ می شود:

علاوه بر آن اگر مقدار y را از رابطه (۲) در معادله دوم دستگاه قرار دهیم بدست می آید:

$$x^m = x^n \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^n$$

$$x^{m-n} = \left(\frac{m}{n}\right)^n; \quad \text{یا:}$$

و از آنجا مقدار x بدست می آید.

$$\left| \begin{array}{l} x_2 = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}} \\ y_2 = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{array} \right| \quad \text{جواب :}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_2 = 4 \\ y_2 = 2 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{array} \right| \quad \text{۶۱۶. جواب :}$$

۶۱۷. راه حل اول. از طرفین معادله دوم لگاریتم می گیریم ، می شود :

$$x \log a = y \log b \quad (۱)$$

فرض می کنیم $x = b^t$ و $y = a^z$ باشد ، در این صورت معادله اول بصورت زیر درمی آید :

$$b^{yt} = a^{xz}$$

و چون با توجه به معادله دوم $b^y = a^x$ است می شود :

$$a^{tx} = a^{xz} \Rightarrow xt = xz \Rightarrow x(t - z) = 0$$

یعنی یا $x = 0$ و یا $t = z$ است .

بازاء $x = 0$ مقدار $y = 0$ می شود که در شرایط مسئله صدق نمی کند . بازاء $z = t$ داریم :

$$x = b^z ; y = a^z \quad (۲)$$

که اگر در رابطه (۱) بجای x و y قرار دهیم بدست می آید :

$$b^z \log a = a^z \log b \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^z = \frac{\log b}{\log a}$$

واز آنجا :

$$z = \frac{\frac{\log b}{\log a}}{\frac{b}{\log a}} = \frac{\log \frac{b}{\log a}}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\frac{b}{\log a}}$$

باتوجه باینکه نسبت لگاریتمهای دوعدد به مبنای لگاریتم مربوط نیست ، خواهیم داشت :

$$\frac{\frac{\log b}{\log \log a}}{b^{\log b}} = b^{\frac{\log_b \frac{\log b}{\log a}}{\log_b b}} = \frac{\log b}{\log a} ;$$

$$x = b^z = b^{\frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log b}} \cdot \frac{\log b}{\log \frac{b}{a}} = \left(\frac{\log b}{\log a} \right)^{\frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}}$$

بنابراین اگر $\frac{\log b}{\log a} > 0$ باشد ، داریم :

$$x = \left(\frac{\log b}{\log a} \right)^{\frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}}$$

و شبیه آن :

$$y = \left(\frac{\log b}{\log a} \right)^{\frac{\log a}{\log \frac{b}{a}}}$$

و اگر $\frac{\log b}{\log a} < 0$ باشد ، معادله دارای جواب نیست .

راه حل دوم . داریم :

$$y \log x = x \log y ; \quad (1)$$

$$x \log a = y \log b ; \quad (2)$$

از دو رابطه بالا می توان رابطه زیر را نتیجه گرفت :

$$\frac{\log y}{\log x} = \frac{\log a}{\log b} \quad (۳)$$

اگر از رابطه (۲) دوباره لگاریتم (با فرض $\log a > 0$ و $\log b > 0$) بدست می آید :

$$\log x - \log y = \log \log b - \log \log a \quad (۴)$$

که با حل دستگاه معادلات خطی (۳) و (۴) مقادیر $\log x$ و $\log y$ بدست می آید . جواب وقتی وجود دارد که $\frac{\log b}{\log a} > 0$ باشد .

۶۱۸. اینجا $x > 0$ و $y > 0$ است . پس از لگاریتم گرفتن از معادلات خواهیم داشت :

$$\begin{cases} y \log x = x \log y \\ ۳ \log x = ۲ \log y \end{cases}$$

فرض کنیم $\log x \neq 0$ و $\log y \neq 0$ باشد . اگر طرفین دو معادله را برهم تقسیم کنیم ، بدست می آید :

$$\frac{y}{۳} = \frac{x}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x$$

مقدار y را در معادله دوم دستگاه قرار می دهیم ، می شود :

$$x^۳ = \frac{۹}{۴}x^۲ \Rightarrow x = \frac{۹}{۴} ; y = \frac{۲۷}{۸}$$

علاوه بر این دستگاه مفروض ریشه های زیر را هم قبول دارد :

$$x = y = ۱$$

۶۱۹. داریم :

$$\begin{cases} ۶۴۲x + ۶۴۲y = ۴۰ \\ ۶۴۲x \cdot ۶۴۲y = ۱۴۴ \end{cases}$$

و طبق روابط ویت بدست می آوریم :

$$z^2 - 40z + 144 = 0 \Rightarrow z_1 = 36 ; z_2 = 4$$

یعنی دستگاه مفروض به دودستگاه زیر تبدیل می شود :

$$\begin{cases} 64^x = 36 \\ 64^y = 4 \end{cases} ; \begin{cases} 64^x = 4 \\ 64^y = 36 \end{cases}$$

که با حل آنها مقادیر x و y بدست می آید .

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{6} \\ y_1 = \frac{\log 6}{\log 64} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{\log 6}{\log 64} \\ y_1 = \frac{1}{6} \end{array} \right| \quad \text{جواب :}$$

۶۲۰. شبیه مسئله قبل اگر $64^x = u$ و $64^y = v$ فرض کنیم داریم :

$$u + v = 12 ; u \cdot v = 32$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{6} \\ y_1 = \frac{1}{4} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{4} \\ y_1 = \frac{1}{6} \end{array} \right| \quad \text{جواب :}$$

۶۲۱. داریم :

$$243 = 3^5 ; 1024 = 2^{10} ; x > 0 , y > 0$$

ازطرفین معادلات درمبنای ۳ لگاریتم می گیریم ، بدست می آید :

$$\begin{cases} y \log_3 x = 5 \\ \frac{10}{y} \log_3 2 = 2 \log_3 2 + 2 \log_3 x - 2 \end{cases}$$

که با حل این دستگاه معادلات خواهیم داشت :

$$\log_3 x (\log_3 2 - 1) = \log_3 2 - 1$$

$$(\log_3 2 - 1)(\log_3 x - 1) = 0$$

$$\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3 ; y = 5$$

۶۲۲. معادله مفروض را بصورت زیر درمی آوریم :

$$\frac{6xy}{5^9} = 5^8 \Rightarrow xy = 12$$

$$7777(x-y-1)(x^2+6y^2-60) = 7777^0 \Rightarrow$$

$$(x-y-1)(x^2+6y^2-60) = 0$$

$$x-y-1=0 ; \quad \text{و از آنجا :}$$

$$x^2+6y^2-60=0$$

و در نتیجه دو دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x \cdot y=12 \end{cases} ; \begin{cases} x^2+6y^2=60 \\ x \cdot y=12 \end{cases}$$

$$: \begin{cases} x_1=4 \\ y_1=3 \end{cases} ; \begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=-4 \end{cases} \quad \text{جواب :}$$

$$\begin{cases} x_{5,6} = \pm 2\sqrt{6} \\ y_{5,6} = \pm \sqrt{6} \end{cases} ; \begin{cases} x_{2,4} = \pm 6 \\ y_{2,4} = \pm 2 \end{cases}$$

۶۲۳. راهنمایی : داریم :

$$\begin{cases} 2 - \log(x-y) = \log 25 \\ \log(x^2 - y^2) = \log 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=4 \\ x^2-y^2=40 \end{cases} \quad \text{و از آنجا :}$$

که با حل این دستگاه جوابهای x و y بدست می آید .

$$\text{جواب : } x=7, y=3$$

۶۲۴. اگر ازطرفین معادله اول لگاریتم بگیریم بدست می آید :

$$\log m(\log m + \log x) = \log n(\log n + \log y) ;$$

$$\log m \log x - \log n \log y = \log^2 n - \log^2 m \quad (۱)$$

و اگر ازطرفین معادله دوم دستگاه لگاریتم بگیریم :

$$\log n \log x - \log m \log y = 0 \quad (۲)$$

که با حل دستگاه معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$$\log x = -\log m, \quad \log y = -\log n$$

$$y = \frac{1}{n}, \quad x = \frac{1}{m} : \text{جواب}$$

۶۲۵. معادله اول دستگاه را ساده می کنیم :

$$\frac{\log 1000 - \log(x-y)}{10} = 250 \Rightarrow \frac{\log \frac{1000}{x-y}}{10} = 250 ;$$

$$\frac{1000}{x-y} = 250 \Rightarrow x-y=4$$

اگر مندار $x-y$ را در معادله دوم دستگاه قرار دهیم ، پس از ساده کردن چنین می شود :

$$y^2 - 46y + 480 = 0 \Rightarrow y_1 = 16 ; y_2 = 30$$

$$y = 16, \quad x = 20 : \text{جواب}$$

۶۲۶. معادله دوم را می توان بصورت زیر نوشت :

$$(x-y)^2 = 4 \Rightarrow x-y = \pm 2$$

$$y = x + 2 ; y = x - 2 \quad \text{و بنا بر این}$$

اگر در معادله اول $y = x + 2$ قرار دهیم ، می شود :

$$2^x \times 4^{x+2} = 32 \Rightarrow 2^{3x} \cdot 2^4 = 2^5 ;$$

$$y_1 = \frac{7}{3} ; x_1 = \frac{1}{3} : \text{و از آنجا}$$

حالا اگر در معادله اول دستگاه $y = x - 2$ قرار دهیم ، می شود :

$$2^3x = 2^9 \Rightarrow x_7 = 3 ; y_7 = 1$$

۶۲۷. معادلات مفروض را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ \frac{x+y}{x-y} = 8 \end{cases}$$

که باحل آن جوابهای $x_1 = 9$ ، $y_1 = 7$ بدست می‌آید .

جوابهای منفی $x_7 = -9$ ، $y_7 = -7$ در معادلات صدق نمی‌کنند .

۶۲۸. رابطه زیر واضح است :

$$\log_x y = \frac{1}{\log_y x} ;$$

بنابراین معادله اول دستگاه بصورت زیر درمی‌آید :

$$\log^2_y x - 2 \log_y x + 1 = 0 \Rightarrow \log_y x = 1 \Rightarrow y = x$$

که اگر بجای y در معادله دوم دستگاه قرار دهیم می‌شود :

$$x = y = 3$$

۶۲۹. جواب : $x = 2$ ، $y = 6$.

۶۳۰. با استفاده از رابطه $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$ ، معادله اول بصورت زیر

درمی‌آید :

$$3 \log^2_x y + 8 \log_x y - 3 = 0 ,$$

از آنجا :

$$\log_x y = \frac{1}{3} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_x y = -3 \Rightarrow y = x^{-3}$$

که با قرار دادن این مقادیر در معادله دوم ، جوابهای x و سپس y بدست

می‌آید :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 8 \\ y_2 = 2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{4} \\ y_1 = 64 \end{array} \right. \quad \text{جواب :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 32 \\ y_2 = 2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = 32 \end{array} \right. \quad \text{جواب ۶۳۱}$$

۶۳۲. دستگاه مفروض را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 40 \\ x \cdot y = 21 \end{array} \right.$$

که باحل آن جوابهای $x=7$ و $y=3$ بدست می آید .

۶۳۳. دستگاه معادلات مفروض را می توان بصورت زیر درآورد :

$$\left\{ \begin{array}{l} xy = a^2 b (2a + 3b) \\ \frac{x}{y} = \frac{a^2 b^2}{2a + 3b} \end{array} \right.$$

که باحل آن مقادیر x و y بدست می آید .

۶۳۴. با استفاده از رابطه $\log_a N = \log_{a^2} (N^2)$ ، دستگاه مفروض بصورت زیر درمی آید :

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_4 x^2 + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_4 y^2 + \log_4 z + \log_4 x = 2 \\ \log_{16} z^2 + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 y z = 4^2 \\ y^2 x z = 4^2 \\ z^2 x y = 16^2 \end{array} \right. \quad (2) \quad \text{و یا :}$$

از ضرب سه معادله دستگاه (۲) در یکدیگر و با توجه باینکه x و y و z مثبت اند ، بدست می آید :

$$xyz = ۲۴ \quad (۳)$$

و با تقسیم هریک از معادلات دستگاه (۲) بر معادله (۳) مقادیر x و y و z بدست می آید .

$$\text{جواب : } z = \frac{۳۲}{۳} , y = \frac{۲۷}{۸} , x = \frac{۲}{۳}$$

$$۶۳۵. \text{ جواب : } \begin{vmatrix} x_2 = \frac{a}{2} \\ y_2 = \frac{9a}{2} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 = \frac{9a}{2} \\ y_1 = \frac{a}{2} \end{vmatrix}$$

$$۶۳۶. \text{ جواب : } y = p^{\frac{n}{n-m}} , x = p^{\frac{n^2}{m(n-m)}}$$

§ ۱۱. آنالیز ترکیبی و بسط دوجمله‌ای

۶۳۷. داریم :

$$C_n^k = C_n^{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$$

با توجه باین رابطه نتیجه می گیریم که ترکیب n حرف k به k وقتی صعودی است که داشته باشیم :

$$\frac{n-k+1}{n} > 1 \Rightarrow k < \frac{n+1}{2}$$

وقتی که n عددی زوج است $k = \frac{n}{2}$ می شود .

و وقتی که n عددی فرد است : $k_1 = \frac{n-1}{2}$ و $k_2 = \frac{n+1}{2}$

درحقیقت اگر فرض کنیم $n = 2p + 1$ خواهیم داشت : $p = \frac{n-1}{2}$ و

علاوه بر آن .

$$k < \frac{p+1}{2} + \frac{1}{2} = p+1 \Rightarrow k < p+1$$

بنابراین برای حداکثر تعداد ترکیب :

$$k = p = \frac{n-1}{2}$$

ولی داریم :

$$C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{n-\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$$

۶۳۸. واضح است که این تعداد برابر است با حداکثر نقاط تلاقی خطوط

یعنی C_n^2

۶۳۹. تعداد تمام خطوطی که از n نقطه واقع بر صفحه عبور می‌کنند برابر

است با C_n^2 و تعداد خطوطی که از $n-2$ نقطه عبور می‌کنند برابر است با :

$$C_{n-2}^2$$

هر خطی که از دو نقطه از این نقاط عبور کند، همه بقیه خطوطی را که از $n-2$

نقطه عبور کرده‌اند قطع می‌کند، بنابراین روی هر خط C_{n-2}^2 نقطه تلاقی

وجود دارد و با توجه به اینکه هر یک از این نقاط روی دو خط قرار دارد

خواهیم داشت :

$$N = \frac{1}{2} C_n^2 \cdot C_{n-2}^2$$

$$N = \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3) \quad \text{جواب :}$$

۶۴۰. جواب : ۱۰ نفر

۶۴۱. جواب : $C_{15}^2 = 105$

۶۴۲. بترتیب داریم :

$$C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} =$$

$$= \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)}{n!} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} = \\
 &= \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} (m-n+n) = \\
 &= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = C_m^n
 \end{aligned}$$

بنابراین داریم :

$$C_{m-1}^n = C_{m-2}^n + C_{m-2}^{n-1} ;$$

$$C_{m-1}^{n-1} = C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2}$$

و با جمع این دو تساوی بدست می آید :

$$C_m^n = C_{m-2}^n + 2C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2}$$

۶۴۴. داریم :

$$\begin{aligned}
 81^n = 9^{2n} = (10-1)^{2n} = 1 - 10C_{2n}^1 + 10^2C_{2n}^2 - \dots - \\
 - 10^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + 10^{2n}
 \end{aligned}$$

۶۴۵. طبق شرط داریم :

$$C_n^2 : C_n^1 = 11 : 2$$

و از آنجا مقدار n یعنی توان دو جمله ای بدست می آید : $n=12$
طبق رابطه مربوط به جمله عمومی دو جمله ای داریم :

$$T_{k+1} = (\pm 1)^k C_n^k a^k x^{n-k}$$

پنجمین جمله دو جمله ای مفروض را می نویسیم :

$$T_5 = C_{12}^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^4 \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right)^4$$

جواب : $T_5 = 495a^2x^{-2}$

۶۴۶. با توجه به شرط مسئله داریم :

$$C_n^2 = 28$$

و از آنجا $n = 8$ بدست می‌آید (توان دوجمله‌ای).

تعداد تمام جملات بسط دوجمله‌ای مساوی ۹ و بنابراین جمله وسط جمله پنجم است:

$$T_5 = (-1)^4 C_8^4 (\sqrt{1-x})^4 (\sqrt{1+x})^4$$

$$T_5 = 70(1-x^2)^2 \quad \text{جواب:}$$

$$T_4 = 25 \frac{(b+a)a}{(b-a)^3} \quad \text{جواب: ۶۴۷}$$

۶۴۸. مسئله غیرممکن است، زیرا ضرایب بسط دوجمله‌ای اعدادی صحیح هستند.

۶۴۹. داریم:

$$C_n^4 = C_n^1 - C_n^{n-1} \Rightarrow n = 12$$

۶۵۰. داریم:

$$C_m^k : C_m^{k+1} = 7 : 15$$

$$\frac{k+1}{m-k} = \frac{7}{15}; \quad \text{یعنی:}$$

$$7m - 22k = 15 \Rightarrow m = \frac{22k + 15}{7}$$

طبق شرط مسئله، عدد m باید مثبت، صحیح و حداقل باشد و این مقدار هم بازاء $k = 6$ بدست می‌آید.

جواب: $m = 21$

$$T_7 = C_5^2 y^2 \quad \text{جواب: ۶۵۱}$$

۶۵۲. روشن است که مجموع همه ضرایب بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ برابر 2^n است، بنابراین داریم:

$$2^n = 2 \times 2048 \Rightarrow n = 12$$

با استفاده از جمله عمومی دوجمله‌ای خواهیم داشت :

$$T_{k+1} = (-1)^k C_{12}^k \left(\frac{b}{\sqrt[5]{a^3}} \right)^k (a \sqrt[5]{\frac{a}{3}})^{12-k}$$

$$= (-1)^k C_{12}^k b^{\frac{k}{3}} a^{\frac{k-12}{5}} \frac{6(12-k)}{5} - \frac{3k}{5}$$

و بنا بر فرض باید داشته باشیم :

$$a^{\frac{6(12-k)}{5} - \frac{3k}{5}} = a^3$$

$$\frac{6(12-k)}{5} - \frac{3k}{5} = 3 \Rightarrow k = 7$$

با در دست داشتن n و k بسادگی جمله مورد نظر بدست می‌آید .

$$T_8 = -264a^3b^7 \quad \text{جواب :}$$

$$T_6 = C_{12}^6 b^{-7} \quad \text{جواب :} \quad 652$$

654. بنا بر فرض مسئله باید داشته باشیم :

$$C_n^3 : C_n^1 = 187 \Rightarrow n = 35$$

بقیه مسئله شبیه مسئله 652 حل می‌شود .

655. با استفاده از رابطه جمله عمومی دوجمله‌ای خواهیم داشت :

$$T_{k+1} = C_5^k (\sqrt[5]{3})^{5-k} (\sqrt[5]{2})^k = C_5^k \times 3^{\frac{5-k}{5}} \times 2^{\frac{k}{5}}$$

و عبارت بدست آمده وقتی گویا است که مقادیر $\frac{5-k}{5}$ و $\frac{k}{5}$ اعدادی صحیح

باشند و در این شرایط و با توجه باینکه $k < 5$ است تنها $k = 2$ صدق می‌کند.

یعنی تنها یک جمله گویا در بسط دوجمله‌ای وجود دارد .

$$T_3 = C_5^2 (\sqrt[5]{3})^3 (\sqrt[5]{2})^2 = 60 \quad \text{جواب :}$$

656. بنا بر فرض مسئله باید مقادیر C_n^1 ، C_n^2 و C_n^3 یعنی مقادیر :

$$n ; \frac{n(n-1)}{2} ; \frac{n(n-1)(n-2)}{6} ;$$

به تصاعد حسابی باشند و بنا بر این باید داشته باشیم :

$$n(n-1) = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$n^2 - 9n + 14 = 0 \Rightarrow n_1 = 7 \quad (n_2 = 2)$$

۶۵۷. جمله عمومی بسط دوجمله‌ای چنین است :

$$T_{k+1} = C_{12}^k \cdot x^{-\frac{1}{2}(12-k)} \cdot x^{\frac{k}{3}} = C_{12}^k \cdot x^{\frac{5}{6}k-6}$$

و توان $6 - \frac{5}{6}k$ بازاء مقادیر $0, 6$ و 12 برای $k \leq 12$ عددی صحیح است .

جواب : x^{-6} ، $C_{12}^6 x^{-1}$ و x^4

۶۵۸. باید داشته باشیم :

$$C_n^{k+1} - C_n^k = C_n^{k+2} - C_n^{k+1} \quad (n > k)$$

به حل مسئله ۶۵۶ مراجعه کنید .

۶۵۹. حاصل این عبارت را به کمک بسط دوجمله‌ای محاسبه می‌کنیم :

$$\begin{aligned} (1/0005)^{36} &= (1 + 0/0005)^{36} = 1 + 36 \times 0/0005 + \\ &+ \frac{36 \times 35}{2} \times 0/0005^2 + \dots \end{aligned}$$

مجموع دوجمله اول بسط مساوی $1/018$ می‌شود . توجه به جمله سوم نشان می‌دهد که مقدار آن از $0/0002$ کمتر است و بنابراین در محاسبه نتیجه اثری ندارد . همچنین برای جملات بعدی . بنابراین برای محاسبه حاصل عدد تا یک هزارم تقریب کافی است تنها دوجمله بسط آنرا بحساب آوریم .

جواب : $1/018 \neq 1/0005^{36}$

۶۶۰. جواب : $2a^6 - 30a^4b^2 + 30a^2b^4 - 2b^6$

۶۶۱. جواب : $(1+z)^7$

۶۶۲. جواب : $T_5 = 715(1-z)^2(1+z)^4 \sqrt{1+z}$

۶۶۳. جواب : $T_7 = C_{15}^7$

۶۶۴. جواب : يك جمله گویا : $T_{15} = C_{24}^{14} \times 3^2 \times 2^2$

۶۶۷. جمله عمومی بسط دوجمله ای چنین است :

$$T_{k+1} = C_{100}^k (V\bar{2})^{100-k} \left(\frac{4}{V\bar{3}}\right)^k = C_{100}^k \times 2^{50} \times 2^{-\frac{k}{2}} \times 3^{\frac{k}{4}}$$

و برای اینکه این جمله گویا باشد ، لازم و کافی است که عدد k بر ۴ قابل قسمت باشد . از طرف دیگر داریم : $0 \leq k \leq 100$ و بنا بر این خواهیم داشت :

$$k = 0, 4, 8, \dots, 96, 100$$

و تعداد این عددها را می توان از رابطه زیر بدست آورد :

$$100 = 0 + 4(n-1)$$

جواب : ۲۶ جمله .

۶۶۸. جمله عمومی دوجمله ای مفروض چنین است :

$$T_{k+1} = C_{13}^k \left(\sqrt[4]{a^2x}\right)^{13-k} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{ax^2}}\right)^k$$

برای اینکه این جملات مستقل از x باشد باید داشته باشیم :

$$\left(\sqrt[4]{x}\right)^{13-k} \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}\right)^k = x^0$$

$$x^{\frac{13-k}{4} - \frac{2k}{5}} = x^0 \Rightarrow \frac{13-k}{4} - \frac{2k}{5} = 0 \Rightarrow k = 5$$

جواب : T_6

۶۶۹. داریم :

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n = x^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2}x^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{4} +$$

$$+ \frac{n(n-1)x}{\lambda} \frac{n-2}{2} - \frac{1}{2} + \dots$$

طبق شرط باید ضرایب سه جمله اول به تصاعد حسابی باشند، این سه ضریب چنین‌اند:

$$1; \frac{n}{2}; \frac{n(n-1)}{\lambda}$$

با این ترتیب باید داشته باشیم:

$$n = \frac{n(n-1)}{\lambda} + 1 \Rightarrow n^2 - 9n + 8 = 0$$

و از آنجا: $n_1 = 8$ ($n_2 = 1$)

حالا جمله عمومی بسط دو جمله‌ای را با $n = 8$ می‌نویسیم:

$$T_{k+1} = C_{\lambda}^k (V\bar{x})^k \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^{\lambda-k} = 2^{k-8} C_{\lambda}^k x^{\frac{k+8}{4}}$$

درمورد جملات گویا باید $\frac{k+8}{4}$ عددی صحیح باشد و این وضع وقتی پیش می‌آید

که $k = 0$ و 4 و 8 باشد.

جواب: T_1, T_5, T_9 .

۶۷۰. جمله سوم بسط دو جمله‌ای چنین است:

$$10 \times x^{3+2\log x} = 10000000$$

که پس از ساده کردن و لگاریتم گرفتن چنین می‌شود:

$$2\log^2 x + 3\log x - 5 = 0$$

و از آنجا:

$$\log x = 1 \Rightarrow x_1 = 10$$

$$\log x = -\frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{100\sqrt{10}}$$

۶۷۱. داریم:

$$T_{k+1} = (-1)^k C_{2n+1}^k x^{2(2n+1-k)} x^{-2k} = \\ = (-1)^k C_{2n+1}^k x^{2n-2k+2}$$

طبق فرض باید داشته باشیم :

$$2p+2=2n-2k+2 ;$$

$$k = \frac{2n-2p}{2} = 2\left(\frac{2n-2p}{2}\right)$$

از اینجا نتیجه می شود که بازاء همه مقادیر n و p عدد k عددی زوج است.

$$C_{2n+1}^{2\left(\frac{2n-2p}{2}\right)} : \text{ جواب}$$

۶۷۲. دو اتحاد زیر را در نظر می گیریم :

$$(x+1)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^n$$

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

این دو رابطه را در هم ضرب می کنیم . در سمت چپ $(1+x)^{2n}$ بدست می آید . ضریب x^n را در بسط این دو جمله ای بدست می آوریم C_{2n}^n می شود . و در سمت راست تساوی ضریب x^n چنین می شود :

$$1 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 ;$$

یعنی مجموع مربعات ضرایب دو جمله ای نیوتون .

و بنابراین خواهیم داشت :

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

۶۷۳. حاصلضرب مزبور را به Π_n نشان می دهیم ، در این صورت داریم :

$$\Pi_n = x^n + S_n^1 x^{n-1} + S_n^2 x^{n-2} + \dots ;$$

که در آن ضرایب مورد نظر عبارتند از :

$$S_n^1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \quad (1)$$

$$S_n^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^2} + \dots$$

برای محاسبه ضرب x^{n-2} یعنی S_n^2 (که از تمام حاصلضربهای دودوی مقادیر ثابت پرانتزها تشکیل شده است) طرفین رابطه (۱) را مجذور می‌کنیم. بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} + 2S_n^2 = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$$

یعنی:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{4}} + 2S_n^2 = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{2n}};$$

و از آنجا:

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + 6S_n^2 = 3 - \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{3}{2^{2n}};$$

$$S_n^2 = \frac{2^{2n} - 3 \times 2^n + 1}{3 \times 2^{2n}}$$

۶۷۴. تبدیل زیر را انجام می‌دهیم:

$$(1+i)^{4k+2} = [(1+i)^2]^{2k+1} = (2i)^{2k+1}$$

واضح است که وقتی i بتوان عددی فرد برسد، حاصل $i + i - i$ خواهد شد، بنابراین حاصل این دوجمله‌ای يك عدد موهومی خالص است و تمام جملات حقیقی آن حذف می‌شوند. ضمناً روشن است که جملات حقیقی عبارت در ردیفهای فرد قرار گرفته‌اند و بنابراین مجموع جملاتی که در ردیف فرد قرار گرفته‌اند برابر است با صفر.

§ ۱۲. مسائل مختلف

۶۷۶. جواب : ۲۰۰

۶۷۸. جواب : ۱

۶۷۹. جواب : $1/2$

۶۸۰. جواب : ۳۴

۶۸۴. جواب : در عدد شماری به مبنای ۹.

۶۸۷. جواب : در مبنای ۳.

* ۶۹۰. طبق فرضهای اول و دوم مسئله داریم (عدد را $\overline{xyz}$ در نظر گرفته ایم):

$$\begin{cases} ۲۶x + ۶y + z = ۸(y + z) \\ ۴۹x + ۷y + z = ۹(x + y + z) \end{cases}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} ۲۶x - ۲y - ۷z = ۰ \\ ۴۰x - ۲y - ۸z = ۰ \end{cases}$$

از تفاضل این دو معادله بدست می آید :

$$۴x - z = ۰ \Rightarrow z = ۴x$$

چون ارقام x و y و z در مبنای ۶ نمیتواند از ۵ بزرگتر باشد تنها

$x = ۱$ و $z = ۴$ در رابطه فوق صدق می کند و از آنجا $y = ۴$ و عدد ۱۴۴

می شود که خود بخود در شرط سوم مسئله هم صدق می کند .

* ۶۹۱. اگر رقم دهگان را x و یکان را y فرض کنیم داریم :

$$۱۰x + y = y^2 + x^2$$

و از آنجا :

$$x(۱۰ - x^2) = y(y - ۱)$$

سمت راست تساوی عددی زوج است (حاصل ضرب دو عدد متوالی همیشه زوج است)

پس x عددی است زوج . از طرف دیگر باید $۱۰ - x^2 > ۰$ باشد (y و $y - ۱$)

(۱) این مسئله را تنها با دو فرض و مثلاً فرضهای اول و دوم می توان

حل کرد و احتیاجی به فرض سوم نیست «مترجم»

مخالف صفرند زیرا $x \neq 0$ و $x^2 \neq 10$ است) یعنی $x \leq 3$ است باین ترتیب
 $x = 2$ و سپس $y = 4$ می شود .

جواب : ۲۴

* ۶۹۲. اگر عدد را $\overline{xyz}$ فرض کنیم واضح است که $x + y + z < 16$ است،
 زیرا $10000^2 > 1048576 = 16^5$ ، از طرف دیگر باید $x + y + z$ مجذور کامل باشد ، وقتی که $x + y + z = 1$ و یا $x + y + z = 4$ باشد
 $(x + y + z)^5$ عددی سه رقمی نمیشود و تنها با $x + y + z = 9$ جواب
 بدست می آید .

جواب : ۲۴۳

۶۹۳. جواب : کسر متناوب نیست .

۶۹۴. جواب : ۳۱۲۰۰ ریال ، ۳۳۰۰۰ ریال ، ۲۸۸۰۰ ریال و
 ۳۰۰۰۰ ریال .

۶۹۵. جواب : ۶۴۰۰ ، ۹۶۰۰ ، ۱۲۰۰۰ ، ۱۴۰۰۰

۶۹۷. جواب : بعد از ۲۵ روز .

۶۹۸. جواب : ۲۸ سال و ۲۱ سال .

۷۰۰. ابوان شوهر ماری و پتر شوهر آنا است .

۷۰۵. عبارت مفروض را بصورت زیر می نویسیم :

$$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} \Rightarrow x_n^2 = 2 + x_{n-1}$$

با توجه باینکه $x_{n-1} < x_n$ است داریم :

$$x_{n-1}^2 - x_{n-1} - 2 < 0$$

$$(x_{n-1} + 1)(x_{n-1} - 2) < 0 \quad \text{و از آنجا :}$$

و چون $x_{n-1} + 1 > 0$ است، خواهیم داشت :

$$x_{n-1} - 2 < 0 \Rightarrow x_{n-1} < 2$$

بنابراین با توجه به صعودی بودن x_n و اینکه همیشه از ۲ کوچکتر است
 نتیجه می شود که دارای حدی است . اگر این حد را z فرض کنیم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z \text{ داریم :}$$

$$z^2 - z - 2 = 0 \Rightarrow z_1 = 2 (z_2 = -1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \quad \text{: جواب}$$

$$x = 4 \text{ : جواب } ۷۰۶$$

$$x = 625 \text{ : جواب } ۷۰۷$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ : جواب } ۷۰۸$$

۲. هندسه.

۱۳۵. مسائل مسطحه

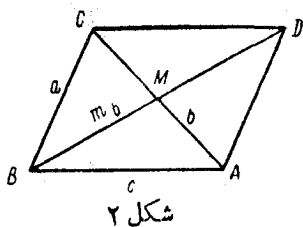
۷۱۵. مثلث ABC را به کمک سه ضلع آن می‌سازیم و از رئوس A و C بموازات اضلاع روبرو رسم می‌کنیم شکل ۲ بدست می‌آید، داریم:

$$(2m_b)^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2 ;$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$



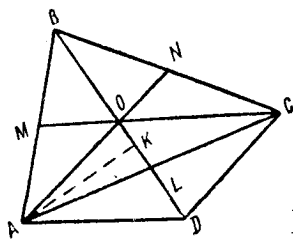
شکل ۲

(m_c و m_b و m_a میان‌های مثلث‌اند).

۷۱۷. مثلث ABC را چنان می‌سازیم که در آن $AN = m_a$ و $BL = m_b$ و $CM = m_c$ باشد (شکل ۳) و یکی از میان‌ها، مثلاً BL ، را با اندازه $LD = OL$ ، امتداد می‌دهیم.

نقطه D را به رئوس A و C وصل می‌کنیم، متوازی‌الاضلاع $ABCD$ بدست می‌آید و رابطه زیر را داریم:

$$b^2 = 2\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 - \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 ;$$



شکل ۳

از آنجا :
$$b = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$$

و مشابه آن :
$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$$

$$c = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}$$

۷۱۸. جواب : ۳ : ۴

۷۱۹. جواب :

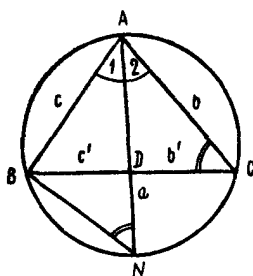
۷۲۰.
$$\frac{1}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = h_a = (2p = a+b+c) \text{ و غیره.}$$

در هر مثلث ، اضلاع متناسبند با معکوس ارتفاعات :

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$$

بنابراین :
$$a : b : c = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 4 : 6 : 3$$

از آنجا : $3 + 4 > 6$ و $3 - 4 < 6$



شکل ۴

جواب : چنین مثلثی وجود دارد .

۷۲۱. b, c, b', c' مفروض اند ، می خواهیم ثابت کنیم :

$$\beta_A^2 = b \cdot c - b' \cdot c'$$

در مثلث ABC (شکل ۴) ، نیمساز زاویه A قاعده $BC = a$ را به پاره خطهای b' و c' تقسیم می کند .

دایره محیطی مثلث را رسم می کنیم ، سپس نیمساز AD را امتداد می دهیم تا این دایره را در N قطع کند و N را به B وصل می کنیم . از تشابه دو مثلث ABN و ADC بدست می آید :

$$\beta_A : c = b : (\beta_A + DN) ;$$

$$\beta_A^2 + \beta_A \cdot DN = bc ; \quad \text{و یا :}$$

$$\beta_A \cdot DN = b'c' \quad \text{از طرف دیگر داریم :}$$

و از آنجا نتیجه می شود :

$$\beta_A^2 = b \cdot c - b' \cdot c'$$

۷۲۲. در مسئله قبل بدست آوردیم :

$$\beta_A^2 = bc - b'c'$$

از طرف دیگر میدانیم که نیمساز داخلی مثلث ، ضلع مقابل را بر نسبت دو ضلع دیگر قطع می کند، یعنی :

$$b' = nb : c' = nc$$

$$nb + nc = a \Rightarrow \frac{a}{b+c}$$

و بنابراین :

$$b'c' = n^2 bc = \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} ;$$

و از آنجا :

$$\beta_A^2 + bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} ;$$

$$\beta_A = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}$$

$$\beta_c = \frac{ab\sqrt{r}}{a+b} \quad \text{۷۲۳. جواب :}$$

۷۲۴. می توان از روابط مسئله ۷۱۵ استفاده کرد، با توجه باینکه برای ضلع مجهول داریم :

$$c^2 = \left(\frac{r}{3}\right)^2 (m_a^2 + m_b^2)$$

$$c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{\Delta}} \quad \text{جواب :}$$

۷۲۶. تساویهای زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} ;$$

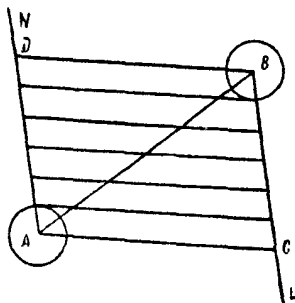
$$h_c = h_a + h_b$$

$$c = \frac{2S}{h_a + h_b} \quad \text{از آنجا :}$$

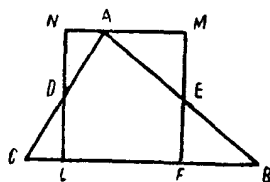
اگر در این رابطه $h_a = \frac{2S}{a}$ و $h_b = \frac{2S}{b}$ را قرار دهیم جواب بدست می‌آید:

$$c = \frac{ab}{a+b} \quad \text{جواب :}$$

۷۲۷. پاره خط AB را در نظر می‌گیریم (شکل ۵) در دو انتهای پاره خط خطوط AN و BL را چنان رسم می‌کنیم که با AB زاویه ۶۰ درجه بسازند. سپس بمرکز هریک از دو انتهای پاره خط AB دایره‌هایی با شعاع پرگار ثابت رسم می‌کنیم. با اندازه شعاع این دایره n مرتبه متوالی روی AN و BL جدا می‌کنیم و نقاط بدست آمده D و C را به A و B وصل می‌کنیم. حالا اگر از نقاط تقسیم خط AD خطوطی بموازات AC رسم کنیم،



شکل ۵



شکل ۶

پاره خط AB به n قسمت مساوی تقسیم خواهد شد.

* ۷۲۸. زوایای B و C را زوایای حاده مثلث می‌گیریم (در هر حال دوزاویه مثلث حاده است) در این صورت اگر از اواسط اضلاع AB و AC عمودهایی

بر قاعده BC فرود آوریم و سپس از رأس A بموازات BC رسم کنیم تا امتداد دو عمود را در نقاط M و N قطع کند (شکل ۶)، مستطیل $MNLF$ هم‌ارز مثلث ABC خواهد بود و بنابراین بوسیله رسم دو عمود فوق قسمتهای مطلوب مثلث بدست می‌آید.

۷۳۱. فرض می‌کنیم: $BK = x$ ، $BN = y$ و $CM = z$ ، مساحت مثلث ABC را S و مساحت مثلث KNB را S_1 می‌گیریم (شکل ۷). طبق شرط داریم:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{4}; \quad (1)$$

و ضمناً:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{xy}{a^2} \quad (2)$$

(زیرا دو مثلث در زاویه B مشترکند).
بامساوی قرار دادن مقادیر سمت راست تساویهای (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$x \cdot y = \frac{1}{4} a^2 \quad (3)$$

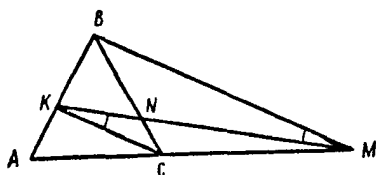
دو مثلث KBC و KMC هم‌ارزند و چون در قاعده KC مشترکند، بنابراین ارتفاعاتی که از رئوس B و M بر این قاعده رسم می‌شود با هم برابرند و BM موازی KC می‌شود.
بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{AC}{CM} = \frac{AK}{BK} \Rightarrow \frac{a}{z} = \frac{a-x}{x} \quad (4)$$

$$\frac{BN}{CN} = \frac{BM}{KC} = \frac{AB}{AK} \Rightarrow \frac{y}{a-y} = \frac{a}{a-x} \quad (5)$$

با حل دستگاه معادلات (۳)، (۴) و (۵) بدست می‌آید:

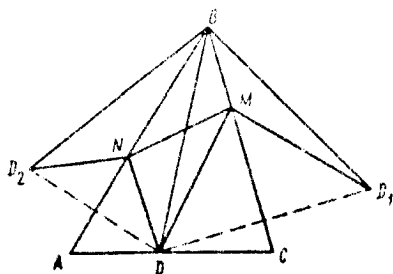
$$x = \frac{2}{3}a; \quad y = \frac{2}{3}a; \quad z = \frac{1}{3}a$$



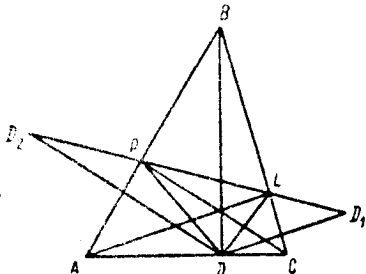
شکل ۷

جواب : $CM = 2a$ ، $BN = \frac{2}{3}a$ ، $BK = \frac{2}{3}a$.

۷۳۲. مثلث ABC را در نظر می گیریم (شکل ۸) . روی ضلع AC نقطه D را در نظر می گیریم ، قرینه D را نسبت به ضلع BC نقطه D_1 و نسبت به ضلع BA نقطه D_2 می نامیم . روی اضلاع BA و BC هم نقاط M و N را انتخاب و با وصل سه نقطه D و N و M مثلث محاطی DNM را بدست می آوریم . محیط این مثلث برابر است با طول خط شکسته D_1MND_2 . بنابراین محیط مثلث محاطی وقتی می نیمم می شود که خط شکسته D_1MND_2 به خط راست تبدیل شود . باین ترتیب اگر نقطه D معلوم باشد ، مثلث با محیط می نیمم وقتی است که M و N در نقاط تلاقی خط D_1D_2 با اضلاع BC و BA باشند .



شکل ۸



شکل ۹

برای حل مسئله مورد نظر باید نقطه D را بر قاعده AC چنان انتخاب کرد که طول پاره خط D_1D_2 حداقل ممکن باشد .

بسادگی معلوم است که $BD = BD_1 = BD_2$ می باشد و بنابراین زاویه D_1BD_2 دو برابر زاویه B از مثلث ABC است . از اینجا نتیجه می شود که اندازه زاویه B از مثلث متساوی الساقین BD_1D_2 مقدار ثابتی است و بمحل نقطه D روی AC بستگی ندارد . بنابراین ضلع D_1D_2 از این مثلث وقتی می نیمم است که طول پاره خطهای $BD = BD_1 = BD_2$ می نیمم باشد ، و این هم وقتی است که BD ارتفاع مثلث ABC باشد .

می توان ثابت کرد که اگر نقطه D بر پای ارتفاع BD از مثلث ABC منطبق

باشد ، نقاط D_1 و D_2 روی امتداد پاره خط PL (شکل ۹) قرار می گیرند
که در آن P و L پای ارتفاعات CP و AL از مثلث مفروض هستند .
اگر نقاط D ، P و L پای ارتفاعات مثلث باشند ، داریم :

$$\widehat{BLP} = \widehat{CLD} ; \widehat{CLD} = \widehat{CLD}_1$$

$$\widehat{BLP} = \widehat{CLD}_1 : \text{ و از آنجا بدست می آید :}$$

یعنی نقطه D_1 بر امتداد پاره خط PL قرار می گیرد . بهمین ترتیب ثابت
می شود که نقطه D_2 هم بر امتداد پاره خط PL است .
باین ترتیب حداقل محیط ، مربوط به مثلث محاطی است که رئوس آن پای
ارتفاعات مثلث باشد (مثلث ارتفاعیه) .

۷۳۴. شکل ۱۰ را در نظر می گیریم ، مثلث Lmk بامثلث BKC متشابه
است . از تشابه این دو مثلث قائم الزاویه نتیجه می شود :

$$\frac{Lm}{BC} = \frac{mk}{CK} ;$$

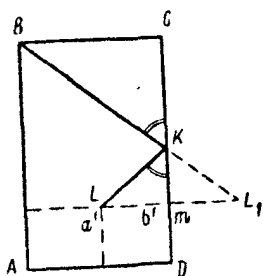
و در آن داریم :

$$CD = a : BC = b : Dm = a'$$

$$Lm = b' : CK = a - DK :$$

$$mk = DK - mD = DK - a'$$

$$DK = \frac{ab' + ba'}{b' + b} : \text{ جواب}$$



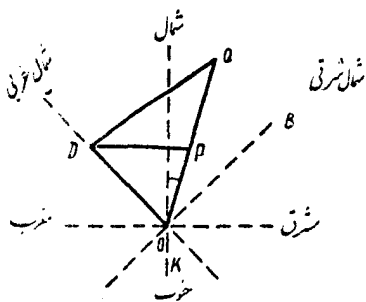
شکل ۱۰

۷۳۵. فرض کنید که کشتی قبل از
تغییر جهت در امتداد KO حرکت
می کند (شکل ۱۱) و پس از تغییر
جهت در امتداد OD :

$$\widehat{COQ} = ۱۵^\circ ; \widehat{DOQ} = ۶۰^\circ ;$$

$$\widehat{ODQ} = ۹۰^\circ$$

(زیرا خط DQ موازی نیمساز
زاویه BOC است) .



شکل ۱۱

و همچنین : $\widehat{PQD} = 30^\circ$
داریم :

$$OD = 5 ; OQ = 10 ; DQ = 5\sqrt{3} ;$$

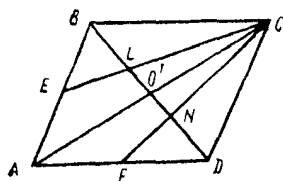
$$\frac{OD}{DQ} = \frac{OP}{PQ} \text{ (DP نیمساز زاویه D می باشد)}$$

$$\frac{OP}{PQ} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} ; OP + PQ = 10 \text{ یا :}$$

$$\text{جواب : } PQ = 5(3 - \sqrt{3})$$

۷۳۶. در مثلث ABC (شکل ۱۲) خطوط CE و BO' میانه اند و بنا بر این داریم :

$$BL = \frac{2}{3}O'B = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD$$



شکل ۱۲

به همین ترتیب در مثلث ACD خطوط CF و DN میانه اند و بنا بر این :

$$DN = \frac{1}{3}BD$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$LN = \frac{1}{3}BD$$

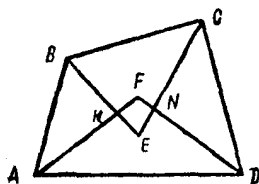
$$P = 204/3^{em} \text{ جواب عددی : } 737$$

۷۳۸. فرض کنید AF ، DF ، BE و CE نیمسازهای زوایای A ، D ، B و C از چهارضلعی ABCD باشند (شکل ۱۳). در مثلث AFD داریم :

$$\widehat{AFD} = 180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{D}}{2} \quad (1)$$

و در مثلث BEC :

$$\widehat{BEC} = 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \quad (2)$$



شکل ۱۳

از جمع روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$$\widehat{AFD} + \widehat{BEC} = 360^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}{2} = 180^\circ$$

و بنابراین چهارضلعی FNEK يك چهارضلعی محاطی است .

۷۳۹. راهنمایی : طول اقطار چهارضلعی محاطی را x و y فرض کنید و از روابط بطلمیوس استفاده کنید :

$$xy = ac + bd ; \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

جواب :

$$y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}} ; \quad x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$$

۷۴۰. قطر و ضلع مربع را بترتیب d و a فرض کنید ، دو معادله زیر را خواهیم داشت :

$$d - a = 6 ; \quad d^2 = 2a^2$$

جواب : $d = 20/485^m ; a = 14/485^m ; R = 10/243^m$

۷۴۱. اگر $AE = x$ فرض کنیم (شکل ۱۴)

داریم :

$$\frac{x}{b} = \frac{AD}{c} = \frac{DE}{a} ;$$

بنابراین :

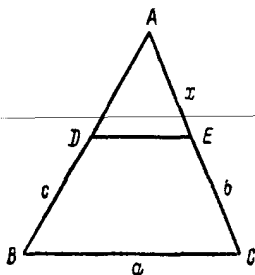
$$AD = \frac{cx}{b} ; \quad DE = \frac{ax}{b} ;$$

$$CE = b - x ; \quad BD = c - \frac{cx}{b} = \frac{c(b - x)}{b}.$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$b - x + \frac{ax}{b} + \frac{c(b - x)}{b} + a = 2p ;$$

شکل ۱۴

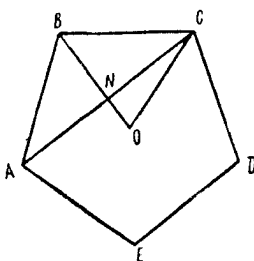


و از آنجا :

$$x = \frac{b(p_1 - p)}{p_1 - a}$$

که در آن : $p_1 = a + b + c$ و $p_1 - a > 0$ است .

۷۴۲. $AC = x$ فرض می کنیم . از مثلثهای قائم الزاویه BNC و ONC (شکل ۱۵) بدست می آید :



شکل ۱۵

$$BN = \sqrt{BC^2 - NC^2} ;$$

$$ON = \sqrt{OC^2 - NC^2}$$

ولی داریم : $R = BN + ON$

یعنی :

$$R = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

و از آنجا : $a^2 = R^2(4a^2 - x^2)$ (۱)

از طرف دیگر داریم :

$$a = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{10}} \quad (2)$$

با حذف R بین روابط (۱) و (۲) بدست می آید :

$$AC = x = \frac{a(5 + \sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$$

۷۴۳. مثلثهای AMB و MOC متشابه اند (شکل ۱۶) ، از آنجا :

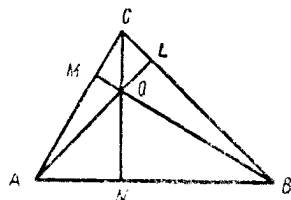
$$\frac{CO}{AB} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow$$

$$\frac{CO}{c} = \pm \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b \cdot h_b}$$

که در آن $AB = c$ ، $MB = h_b$ و

MB از رابطه زیر معین می شود :

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2b \cdot MC$$



شکل ۱۶

بنابراین داریم :

$$CO = \pm \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2b h_b} = \pm \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2S}$$

و بهمین ترتیب AO و BO محاسبه می‌شوند .

توضیح : علامت (-) برای فاصله منفی از رأس زاویه منفرجه است .

۷۴۴. داریم (شکل ۱۷) :

$$a + b = CL + LA + AM + MB ;$$

از طرف دیگر داریم :

$$CL = NC = r ;$$

$$LA = AM = b - r ;$$

$$MB = NB = a - r ;$$

و بنابراین

$$b + c = 2b - 2r + a \Rightarrow c - b = a - 2r \quad (۱)$$

طبق قضیه فیثاغورث :

$$c^2 - b^2 = a^2 \Rightarrow (c - b)(c + b) = a^2$$

و از آنجا :

$$c + b = \frac{a^2}{a - 2r} \quad (۲)$$

با حل دستگاه معادلات (۱) و (۲) جواب بدست

می‌آید .

جواب :

$$c = \frac{a^2 - 2r(a - r)}{a - 2r} ; b = \frac{2r(a - r)}{a - 2r}$$

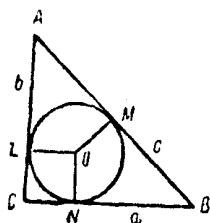
۷۴۵. داریم (شکل ۱۷) :

$$a + b = AL + LC + CN + NB ;$$

$$AL + NB = AM + MB = c ;$$

$$LC = CN = r$$

از طرف دیگر :



شکل ۱۷

$$a+b=c+2r \quad (۱) \quad \text{و بنابرین:}$$

طرفین رابطه (۱) را مجذور می‌کنیم، با توجه به رابطه $a^2+b^2=c^2$ خواهیم داشت:

$$ab=2r(c+r) \quad (۲)$$

باین ترتیب بادرست داشتن مجموع و حاصلضرب a و b (روابط ۱ و ۲) می‌توان آنها را باحل معادله درجه دوم زیر بدست آورد:

$$x^2-(c+2r)x+2r(c+r)=0$$

۷۴۶. طبق فرض مسئله داریم (شکل ۱۸):

$$BD=h; OL=r$$

از مثلث قائم الزاویه BOL بدست می‌آید:

$$BL=\sqrt{(h-r)^2-r^2}=\sqrt{h^2-2rh};$$

بافرض $DC=CL=x$ ، از معادله:

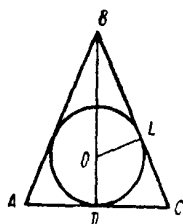
$$(BL+x)^2=h^2+x^2$$

بدست می‌آید:

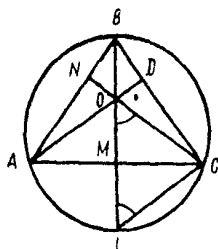
$$x=\frac{rh}{\sqrt{h(h-2r)}}$$

$$AB=BC=BL+x=\frac{h(h-r)}{\sqrt{h(h-2r)}} \quad \text{جواب:}$$

$$AC=\frac{2rh}{\sqrt{h(h-2r)}}$$



شکل ۱۸



شکل ۱۹

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm} \quad \text{جواب: ۷۴۸}$$

۷۴۹. مثلث حاده الزاویه ABC را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۹). فرض می‌کنیم O محل تلاقی ارتفاعات و L قرینه آن نسبت به ضلع AC باشد.

مثلث COM با مثلث CLM برابر است، زیرا قائم الزاویه بوده و اضلاع مجاور به زاویه قائمه برابر دارند، بنابراین:

$$\widehat{CLM}=\widehat{COM}$$

علاوه بر آن دو زاویه COM و CAB هم برابرند (اضلاع آنها متناظرآ برهم عمود است) و در نتیجه :

$$\widehat{CLM} = \widehat{CAB}$$

با این ترتیب نقاط A ، B ، C و L بر یک دایره قرار دارند .
به همین ترتیب می توان ثابت کرد که قرینه O نسبت به اضلاع دیگر مثلث هم بردایره محیطی قرار دارد .

برای مثلث منفرجه الزاویه هم می توان شبیه مثلث حاده الزاویه اثبات کرد .

$$۷۵۰. \text{ جواب : } R_1 = \frac{R\sqrt{6}}{۲}$$

۷۵۱. شعاع دایره محیطی مثلث را R فرض می کنیم (شکل ۲۵) . O مرکز

دایره و BD قطر آنست . مثلث BCD

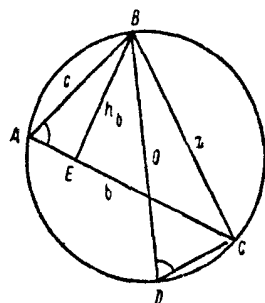
قائم الزاویه است و با مثلث قائم الزاویه

ABC متشابه است (BE ارتفاع مثلث

است) و بنابراین داریم :

$$\frac{c}{h_b} = \frac{2R}{a} ;$$

از طرف دیگر داریم :



شکل ۲۵

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{abc}{4S} \quad \text{جواب :}$$

۷۵۲. طبق فرض مسئله داریم :

$$AB^2 = 2AC^2 \quad (۱)$$

وترهای NA و NB را امتداد می دهیم تا امتداد ضلع CD را در نقاط

K و M قطع کنند (شکل ۲۱) . داریم :

$$\frac{KC}{AE} = \frac{CD}{EL} = \frac{DM}{LB} \quad (۲)$$

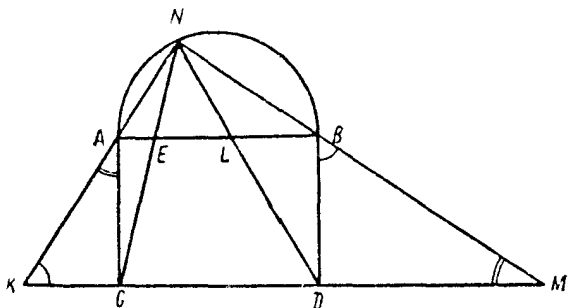
از تشابه دو مثلث AKC و BDM بدست می آید :

ولی چون داریم $BD = AC$ خواهیم داشت :

در رابطه (۴) بجای KC ، DM و CD مقادیر متناسب آنها را از رابطه (۲) قرار می‌دهیم ، می‌شود :

$AL + BE = AB + EL$: و چون داریم :
خواهیم داشت .

شکل ۲۱



$$AL^{\vee} + BE^{\vee} = AB^{\vee} \quad \text{از آنجا:}$$

$$AL \cdot BE = AE \cdot BL + AB \cdot EL$$

زیرا رابطه:

از اتحاد زیر نتیجه می شود :

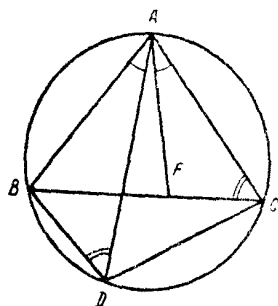
$$(AE+EL)(EL+LB)=AE\cdot BL+(AE+EL+LB)\cdot EL$$

۷۵۳. چهارضلعی محاطی ABCD را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۲). زوایای زیر را می‌سازیم:

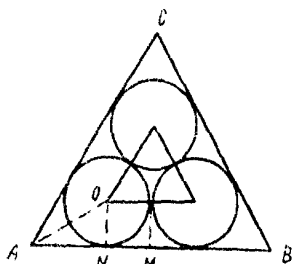
$$\widehat{CAF} = \widehat{BAD} \quad ; \quad \widehat{BDA} = \widehat{BCA}$$

مثلهای ABD و AFC متشابه‌اند و از آنجا خواهیم داشت :

$$\frac{BD}{FC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow BD \cdot AC = FC \cdot AD \quad (۱)$$



شکل ۲۲



شکل ۲۳

و همچنین دو مثلث BAF و DCA متشابه اند و از آنجا :

$$\frac{BF}{DC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow DC \cdot AB = BF \cdot AD \quad (۲)$$

روابط (۱) و (۲) را با هم جمع می کنیم می شود :

$$AC \cdot BD + AB \cdot DC = (BF + FC)AD = AC \cdot AD$$

۷۵۴. شعاع دایره مورد نظر را r می گیریم (شکل ۲۳) ، در این صورت داریم :

$$AN + r = \frac{a}{2} ;$$

ولی در مثلث AON زاویه A برابر ۳۰ درجه است و بنابراین :

$$AO = 2r : AN = r\sqrt{3} ;$$

و بنابراین :

$$r\sqrt{3} + r = \frac{a}{2}$$

و از آنجا مقدار r بدست می آید .

$$r = \frac{1}{6}a(\sqrt{3} - 1) : \text{ جواب}$$

۷۵۵. وتر AC را و تر مجموع دوقوس AB و AC می گیریم (شکل ۲۴) .

بنابر قضیه بطلمیوس در چهار ضلعی محاطی $ABCD$ داریم :

$$AC \cdot BD = a \cdot CD + b \cdot AD$$

یا :

$$AC \cdot r = a \sqrt{r^2 - b^2} + b \sqrt{r^2 - a^2} ;$$

زیرا داریم :

$$BD = r ; CD = \sqrt{(r)^2 - b^2} ;$$

$$AD = \sqrt{(r)^2 - a^2} ; AC = x$$

و پس از عملیات ساده جواب بدست می آید :

$$x = a \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}} + b \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}$$

به همین ترتیب برای وتر تفاضل دو قوس، خواهیم داشت :

$$x = a \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}} - b \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} \quad (a > b)$$

۷۵۶. ضلع ۱۵ ضلعی منتظم عبارتست از وتر تفاضل قوسهای ۶۰ درجه و ۳۶ درجه .

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

و با توجه به معلوم بودن ضلعی ۱۰ ضلعی منتظم و ضلع ۶ ضلعی منتظم و ضمناً رابطه مسئله ۷۵۵، با فرض $R=1$ ، خواهیم داشت :

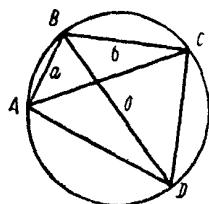
$$\begin{aligned} a_{15} &= a_6 \sqrt{1 - \frac{a_{10}^2}{4}} - a_{10} \sqrt{1 - \frac{a_6^2}{3}} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4 \times 4}} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

جواب :

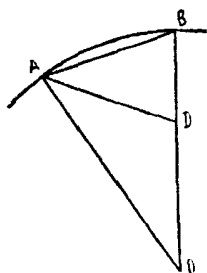
$$a_{15} = \frac{1}{4} [\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)]$$

۷۵۷. $AB = a_{10}$ فرض می کنیم (شکل ۲۵) ، داریم :

$$\widehat{AOB} = \frac{2d}{5} ; \hat{A} = \hat{B} = \frac{2d}{5}$$



شکل ۲۴



شکل ۲۵

AD نیمساز زاویه A را می‌سازیم .
 دو مثلث ADB و ADO متساوی الساقین اند
 و بنابراین داریم :

$$AD = AB = OD$$

با استفاده از خاصیت نیمساز در مثلث
 داریم :

$$\frac{AB}{AO} = \frac{BD}{OD} \Rightarrow \frac{OD}{BO} = \frac{BD}{OD}$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$AB^2 = OD^2 = BO \cdot BD$$

$$R = a \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \quad \text{۷۵۸. جواب :}$$

۷۵۹. طبق فرض نسبت دو قاعده $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ می‌باشد . فرض می‌کنیم $a = 3x$ ،
 $b = 4x$. با توجه به معلوم بودن خطی که وسط دوساق را بهم وصل می‌کند
 داریم :

$$\frac{3x + 4x}{2} = 7 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین قاعده‌های ذوزنقه $a = 6$ و $b = 8$ می‌شود . مرکز دایره محیطی
 ذوزنقه بر ارتفاعی قرار دارد که از محل تلاقی اقطار می‌گذرد . شعاع این
 دایره را R فرض می‌کنیم ، از مثلثهای قائم‌الزاویه AON و BOM
 بدست می‌آید :

$$R^2 = z^2 + 4^2 ;$$

$$R^2 = (7 - z)^2 + 3^2$$

و از آنجا $z = 3$ و $R = 5$ می‌شود .

جواب : $R = 5^m$.

۷۶۰. مثلث BOC قائم‌الزاویه (شکل ۲۶) و DC ارتفاع وارد بروتر در
 این مثلث است ،

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{r}\right)^r = h \cdot OD \\ R^r = OD^r + \left(\frac{a}{r}\right)^r \end{cases}$$

$$R = \frac{a}{4h} \sqrt{a^2 + 4h^2} : \text{جواب}$$

۷۶۳. مثلث‌های AOB و AOD را در نظر می‌گیریم (شکل ۳). این دو مثلث قاعده‌های مساوی دارند:

$$OB = OD = \frac{2}{3}m_b$$

همچنین AK ارتفاع مشترك این دو مثلث است ، بنابراین مساحت‌های آنها برابر است یعنی :

$$S_{AOD} = S_{AOB} = \frac{1}{3} S_{ABC}$$

با این ترتیب اگر مساحت مثلث ABC را به S نشان دهیم، خواهیم داشت :

$$S = r S_{AOD}$$

اضلاع مثلث AOD چنین اند :

$$AO = \frac{r}{r} m_a ; OD = \frac{r}{r} m_b ; AD = OC = \frac{r}{r} m_c$$

و بنا براین :

$$S = r \sqrt{p_1 (p_1 - \frac{r}{\gamma} m_a) (p_1 - \frac{r}{\gamma} m_b) (p_1 - \frac{r}{\gamma} m_c)}$$

$$p_1 = \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r} m_a + \frac{r}{r} m_b + \frac{r}{r} m_c \right) = \frac{1}{r} (m_a + m_b + m_c) \quad \text{که در آن:}$$

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a) \times (m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)} \quad \text{جواب :}$$

۷۶۴. S' مساحت مثلثی که اضلاعش m_a ، m_b و m_c است بدست می آوریم. طبق رابطه هرون بدست می آید :

$$S' = \frac{1}{4} \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a) \times (m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$$

مساحت مثلث مفروض هم برحسب میانهای آن معلوم است (مسئله ۷۶۳) و بنابراین خواهیم داشت :

$$S : S' = 4 : 3$$

۷۶۵. مساحت مثلث ABC چنین است :

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} \quad (۱)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (۲)$$

باتوجه باینکه $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ می باشد، از رابطه (۱) اضلاع مثلث را

برحسب S و ارتفاعات بدست می آوریم و در رابطه (۲) می گذاریم، می شود :

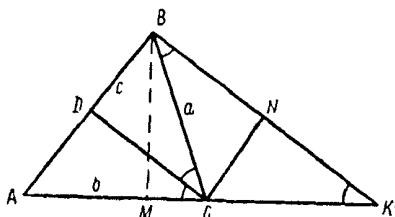
$$S = S' \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right) \times \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}$$

$$S = 1 : \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right) \times \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)} \quad \text{جواب :}$$

۷۶۶. در مثلث ABC (شکل ۲۷) ضلع AC را امتداد می دهیم تا در نقطه K با خط $DC \parallel BK$ یکدیگر را قطع کنند. مثلث BCK متساوی الساقین

خواهد شد و بنابراین $BC = CK = a$ می‌شود ، حالا BK را محاسبه می‌کنیم ، داریم $(DC = \beta_c)$:

$$\frac{BK}{\beta_c} = \frac{b+a}{b} \Rightarrow BK = \frac{\beta_c(a+b)}{b}$$



شکل ۲۷

CN ارتفاع مثلث BCK چنین است :

$$CN = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - \beta_c^2(a+b)^2}}{2b}$$

مساحت مثلث BCK را محاسبه می‌کنیم :

$$S' = \frac{BK \cdot CN}{2} = \frac{\beta_c(a+b) \sqrt{4a^2b^2 - \beta_c^2(a+b)^2}}{4b^2}$$

مثلتهای ABC و BCK در ارتفاع BM مشترکند ، بنابراین نسبت مساحت‌های آنها مثل نسبت قاعده‌های آنهاست . مساحت مثلث ABC را به S نشان می‌دهیم ، داریم :

$$S : S' = b : a \Rightarrow S = \frac{bS'}{a}$$

$$S = \frac{\beta_c(a+b)}{4ab} \sqrt{4a^2b^2 - \beta_c^2(a+b)^2} \quad \text{جواب :}$$

$$S = ۱۵۴ \sqrt{۱۴} \quad \text{جواب : ۷۶۷}$$

$$S_7 = ۱۵/۳۶m^2 ; S_1 = ۸/۶۴m^2 ; h = ۴/۸m \quad \text{جواب : ۷۶۸}$$

۷۶۹. خط موازی قاعده ، مثلثی متشابه با مثلث اصلی بوجود می‌آورد .

نسبت مساحت‌های این دو مثلث مساوی مربع نسبت تشابه خواهد بود. ضلع مجهول را x و مساحت مثلثها را به ترتیب S و S_1 می‌گیریم، معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{x^2}{a^2} ; S_1 = \frac{1}{4} S$$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{وازانجا بدست می‌آید:}$$

$$x = \frac{25\sqrt{2}}{2} \text{ cm} \quad \text{۷۷۰. جواب:}$$

۷۷۱. اقطار لوزی را $2x$ و $2y$ می‌گیریم، بنابراین فرض مسئله دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$2xy = Q ; \frac{x}{y} = \frac{m}{n}$$

وازانجا:

$$x = \sqrt{\frac{mQ}{2n}} ; y = \sqrt{\frac{nQ}{2m}}$$

و طبق قضیه فیثاغورث ضلع لوزی بدست می‌آید:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$a = \sqrt{Q \frac{m^2 + n^2}{2mn}} \quad \text{جواب:}$$

$$S = 6m^2 \quad \text{۷۷۲. جواب:}$$

۷۷۳. ضلع لوزی چنین است:

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

مساحت لوزی را می‌توان چنین نوشت:

$$S = a \cdot CE = a \cdot CF = \frac{1}{4} d_1 d_2$$

و بدست می‌آید:

$$CE = CF = \frac{d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$$

بنابراین مثلثهای قائم الزاویه ACE و ACF در ضلع مجاور به زاویه قائمه $(CE = CF)$ و وتر AC مساوی اند.

برای محاسبه مساحت مجهول AE را محاسبه می کنیم:

$$AE = \sqrt{d_1^2 - CE^2} = \frac{d_1^2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$$

و مساحت مجهول چنین است:

$$S' = AE \cdot CE$$

$$S' = \frac{d_1^2 d_2}{d_1^2 + d_2^2} \quad \text{جواب:}$$

۷۷۴. اقطار لوزی را به $3x$ و $4x$ نشان می دهیم، مساحت لوزی چنین می شود:

$$S = 6x^2$$

وضع لوزی:

$$a = \sqrt{(2x)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}x$$

و شعاع دایره محاطی:

$$r = \frac{S}{2a} = \frac{1}{2}x$$

و مساحت دایره محاطی:

$$S_1 = n\left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

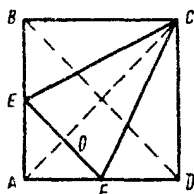
$$\frac{S}{S_1} = \frac{25}{6\pi} \quad \text{جواب:}$$

۷۷۵. قطر مربع (شکل ۲۸) $d = a\sqrt{2}$ است.

در مثلث ABD می توان نوشت:

$$EF = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

در مثلث متساوی الساقین AOE داریم:



شکل ۲۸

$$AO = OE = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$OC = d - AO = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \quad \text{و بنا براین :}$$

در نتیجه مساحت مثلث مورد نظر چنین می شود :

$$S = \frac{1}{2} EF \cdot OC = \frac{3}{8} a^2$$

۷۷۶. چهار ضلعی مورد نظر لوزی است بازوایای مساوی ۶۵ درجه و ۱۲۵ درجه (شکل ۲۹) .

$$ML = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \text{ارتفاع مثلث DMC}$$

$$MK = a - \frac{a\sqrt{2}}{2} : \text{و پاره خط :}$$

بنابراین قطر بزرگتر لوزی چنین می شود :

$$MN = LK - 2MK = a(\sqrt{2} - 1)$$

مثلث EMF متساوی الاضلاع است زیرا : $EM = MF = EF$
از مثلث قائم الزاویه EOM داریم :

$$EM^2 - OE^2 = OM^2$$

$$OE = \frac{1}{2} EM ; \quad \text{ولی :}$$

$$OM = \frac{1}{2} MN = \frac{a}{2} (\sqrt{2} - 1)$$

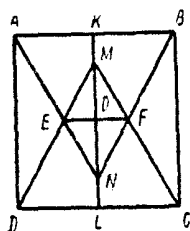
بنابراین :

$$EM^2 - \frac{1}{4} EM^2 = \frac{a^2}{4} (\sqrt{2} - 1)^2$$

و از آنجا ضلع لوزی چنین می شود :

$$EM = \frac{a(3 - \sqrt{2})}{3}$$

ولی ضلع لوزی مساوی قطر کوچکتر آنست ، بنابراین مساحت لوزی چنین می شود :

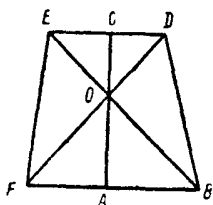


شکل ۲۹

$$S = \frac{1}{2} EF \cdot MN = \frac{1}{2} EM \cdot MN$$

$$S = \frac{a^2}{3} (2\sqrt{3} - 3) \quad \text{جواب :}$$

۷۷۸. محل تلاقی اقطار دوزنقه را O می گیریم و ارتفاعی که از O می گذرد



شکل ۳۰

رسم می کنیم ، نقاط A و C را محل تلاقی این ارتفاع با دو قاعده می گیریم (شکل ۳۰) مثلثهای AOB و COD را در نظر می گیریم ، این دو مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین اند ، بنابراین :

$$AC = AO + OC = AB + CD = m$$

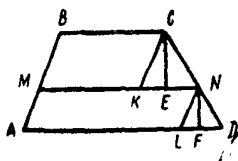
یعنی مساحت دوزنقه چنین است : $S = m^2$

۷۷۹. طبق فرض مسئله داریم (شکل ۳۱) :

$$S_{AMND} = S_{MBCN} \quad (۱)$$

اگر $MN = x$ فرض کنیم ، بدست می آید :

$$\frac{x+a}{2} \cdot NF = \frac{x+b}{2} \cdot CE$$



شکل ۳۱

که در آن :

$$CE \perp MN ; NF \perp AD ;$$

$$\frac{x+a}{x+b} = \frac{CE}{NF} \quad (۲)$$

یعنی :

از تشابه دو مثلث KCN و LND ($NL \parallel AM$ و $KC \parallel MB$) بدست می آید :

$$\frac{KN}{LD} = \frac{CE}{NF} \Rightarrow \frac{x-b}{a-x} = \frac{CE}{NF} \quad (۳)$$

از مقایسه روابط (۲) و (۳) مقدار x بدست می آید .

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad \text{جواب :}$$

۷۸۰. راهنمایی : با استفاده از خاصیت چهارضلعی محیطی روشن می شود که

پاره خط واصل بین اوساط دو ساق دوزنقه برابر با ساق دوزنقه یعنی c و ارتفاع دوزنقه برابر با قطر دایره محاطی یعنی $2r$ می شود :

$$S = 2cr \quad \text{جواب :}$$

۷۸۱. ضلع مثلث را a و ارتفاع آنرا h می گیریم ، داریم :

$$a - h = d \quad \text{و} \quad h = \frac{a\sqrt{r}}{r} ;$$

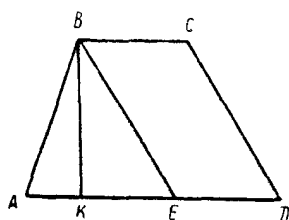
$$a = 2(2 + \sqrt{r})d \quad \text{از آنجا :}$$

$$S = (12 + 7\sqrt{r})d^2 \quad \text{جواب :}$$

$$S = \frac{\sqrt{r}}{4}(a^2 - b^2) \quad \text{جواب : ۷۸۲}$$

۷۸۳. مساحت دوزنقه $h \cdot S = \frac{a+b}{2}$ می باشد . h را محاسبه می کنیم ،

برای این منظور از نقطه B (شکل ۳۲) ارتفاع BK و خط $BE \parallel CD$ را رسم می کنیم ($CD = d$ و $AB = c$ ، $BC = b$ ، $AD = a$) .



شکل ۳۲

از مثلث ABE بدست می آید :

$$c^2 = d^2 + (a - b)^2 - 2(a - b) \cdot KE ;$$

از آنجا :

$$KE = \frac{d^2 - c^2 + (a - b)^2}{2(a - b)}$$

از مثلث BKE بدست می آید :

$$h = \sqrt{a^2 - KE^2} = \sqrt{d^2 - \left[\frac{d^2 - c^2 + (a - b)^2}{2(a - b)} \right]^2}$$

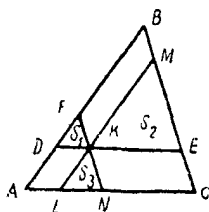
و بنابراین :

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{d^2 - \left[\frac{d^2 - c^2 + (a - b)^2}{2(a - b)} \right]^2} ;$$

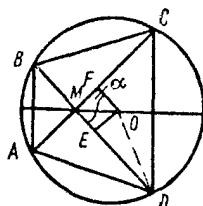
که پس از عملیات ساده می توان آنرا بصورت زیر نوشت :

$$S = \frac{a+b}{4(a-b)} \sqrt{(a-b+c+d)(a-b-c+d) \times (a+b+c-d)(c-a-b+d)}$$

۷۸۴. فرض می‌کنیم $DK=a$ ، $LN=b$ ، $KE=c$ و S مساحت مثلث ABC باشد (شکل ۳۳). با توجه به فرض مسئله مثلثهای DFK و KME و LKN (به مساحت‌های S_1 و S_2 و S_3) با مثلث ABC متشابه‌اند. بنابراین :



شکل ۳۳



شکل ۳۴

$$\frac{S_1}{S} = \frac{a^2}{(a+b+c)^2} ;$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{c^2}{(a+b+c)^2}$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{b^2}{(a+b+c)^2}$$

یعنی :

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{a}{a+b+c} ; \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{c}{a+b+c} ; \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{b}{a+b+c}$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

و در نتیجه خواهیم داشت :

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$$

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2 \quad \text{جواب :}$$

۷۸۵. مساحت چهارضلعی مورد نظر چنین است :

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

بازاء $\alpha = 45^\circ$ داریم (شکل ۳۴) :

$$AC = BD = 2\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}}$$

$$S = 2\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \quad \text{جواب :}$$

$$S = 54 \text{ cm}^2 \quad \text{جواب : ۷۸۶}$$

$$۸ : 3\sqrt{3} : 6\sqrt{3} ; \frac{3}{4}\sqrt{3}R^2 ; \frac{3}{4}\sqrt{3}R^2 : 3R^2 \quad \text{جواب : ۷۸۷}$$

۷۸۸. اگر طول و عرض مستطیل را x و y و نسبت آنها را k فرض کنیم ، دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$x \cdot y = S ; \frac{x}{y} = k$$

$$y = \sqrt{\frac{S}{k}} ; x = \sqrt{k \cdot S} \quad \text{جواب :}$$

۷۸۹. اضلاع مثلث مفروض را $2x - d$ ، $2x$ ، و $2x + d$ فرض می کنیم . در این صورت $2p = 6x$ و $p = 3x$ خواهد شد . ضلع مثلث متساوی الاضلاع $a_r = 2x$ و مساحت آن چنین می شود :

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a_r^2 = x^2 \sqrt{3}$$

از طرف دیگر مساحت مثلث مفروض طبق رابطه هرون چنین است :

$$S' = \sqrt{3x(x+d)x(x-d)} = \sqrt{3x^2(x^2-d^2)}$$

و طبق فرض داریم :

$$S' = \frac{3}{5}S \Rightarrow \sqrt{3x^2(x^2-d^2)} = \frac{3}{5}x^2\sqrt{3}$$

$$2x = \frac{5}{4}d \quad \text{واز آنجا :}$$

و بنابراین اضلاع مثلث چنین اند :

$$a = 2x - d = \frac{3}{4}d ; b = 2x = \frac{5}{4}d ;$$

$$c = 2x + d = \frac{7}{4}d$$

$$a:b:c = 3:5:7$$

جواب :

۷۹۰. اگر دو ضلع دیگر مثلث را x و y بگیریم ، طبق رابطه هرون داریم :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)}$$

مساحت مثلث بستگی به ضرب چهار عامل دارد ، ولی دو عامل اول آن ثابت است و بنابراین کافی است ماکزیم حاصلضرب $(p-x)(p-y)$ را در نظر بگیریم . مجموع این دو عامل مقداریست ثابت و برابر است با a ، بنابراین (شماره ۷۰۳ را به بینید) وقتی S ماکزیم است که این دو عامل برابر باشند :

$$p-x = p-y \Rightarrow x=y$$

جواب : مثلث متساوی الساقین .

۷۹۱. یکی از اضلاع مستطیل را x می گیریم ، دیگری $(p-x)$ میشود . مساحت مستطیل چنین است :

$$S = x(p-x)$$

عوامل x و $p-x$ مجموع ثابتی دارند و بنابراین حاصلضرب آنها وقتی ماکزیم است که باهم برابر باشند :

$$x = p-x \Rightarrow x = \frac{p}{2}$$

یعنی مستطیل تبدیل به مربع شود .

جواب : $x = \frac{p}{2}$ و $S = \frac{p^2}{4}$.

۷۹۲. $A_1B_1 = x$ و $B_1C_1 = y$ ، $AB = c$ و $CD = h$ فرض می کنیم (شکل ۳۵) ، در این صورت سطح مستطیل

مورد نظر چنین میشود :

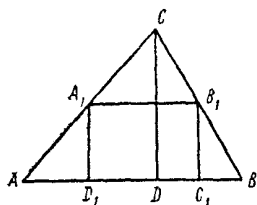
$$S = x \cdot y$$

از تشابه دو مثلث ABC و A_1B_1C بدست می آید :

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{c(h-y)}{h}$$

و بنابراین :

$$S = \frac{c}{h}(h-y)y$$



شکل ۳۵

وماکزیمم آن وقتی است که داشته باشیم :

$$h - y = y \Rightarrow y = \frac{h}{2}$$

جواب : $S = \frac{1}{4}c \cdot h$

۷۹۳. راه حل اول . اگر x یکی از اضلاع مستطیل و p نصف محیط آن باشد ، ضلع دیگر مساوی $p - y$ و مساحت آن چنین می شود :

$$S = (p - x)x \Rightarrow x^2 - px + S = 0$$

واز آنجا : $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - S}$

برای اینکه ریشه های این معادله حقیقی باشد ، باید داشته باشیم :

$$S \leq \frac{1}{4}p^2$$

و بنا بر این حداکثر مقدار S چنین می شود :

$$S = \frac{1}{4}p^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}p$$

یعنی ماکزیمم سطح وقتی است که مستطیل به مربع تبدیل شود .

راه حل دوم . مجموع دو ضلع مستطیل را قطر AB از دایره ای می گیریم (شکل ۳۶) ، نقطه دلخواه D را بر قطر انتخاب و عمود DF را بر قطر رسم می کنیم تا دایره را در F قطع کند ، داریم :

$$FD^2 = AD \cdot DB$$

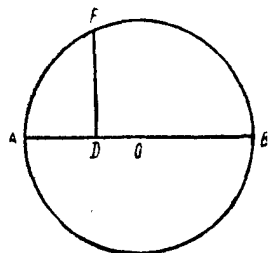
یعنی مساحت مستطیل به اضلاع AD و

BD برابر است با مساحت مربع بضلع DF .

وقتی که D از A تا B تغییر کند مساحت

مربع بضلع DF هم تغییر می کند . ولی واضح است که حداکثر این مساحت

وقتی است که D بر O منطبق باشد یعنی وقتی که $AD = DB$ شود .



شکل ۳۶

بنابر این نتیجه می شود که حداکثر مساحت مستطیل وقتی است که به مربع تبدیل شود.

۷۹۴. طول اضلاع مثلث را $x-1$ ، x و $x+1$ فرض می کنیم، در این صورت مساحت مثلث چنین می شود :

$$S = \sqrt{\frac{2x}{2} \cdot \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} - 1\right) \left(\frac{x}{2} + 1\right)} = \\ = \frac{x}{2} \sqrt{2 \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)} = n \sqrt{2(n^2 - 1)} \quad (n = \frac{x}{2})$$

برای اینکه S عددی صحیح باشد لازم و کافی است که $x = 2n$ عدد زوجی باشد و داشته باشیم :

$$n^2 - 1 = 2m^2 \Rightarrow n^2 - 2m^2 = 1$$

$$(n - m\sqrt{2})(n + m\sqrt{2}) = 1 \quad (1)$$

رابطه (۱) بازاء $n=2$ و $m=1$ برقرار است :

$$(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 1$$

بنابر این داریم :

$$(2 - \sqrt{2})^k (2 + \sqrt{2})^k = 1 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) بدست می آید :

$$n_k + m_k \sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^k ;$$

$$n_k - m_k \sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^k ;$$

و از آنجا :

$$x_k = 2n_k = (2 + \sqrt{2})^k + (2 - \sqrt{2})^k \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

بازاء $k=1$ داریم : $x_1 = 4$: $S=6$

بازاء $k=2$ داریم : $x_2 = 14$ ، $S=84$ و غیره.

از رابطه اخیر می توان نتیجه گرفت :

$$x_k = 4x_{k-1} - x_{k-2}$$

مثلا بازاء $k=3$ داریم : $x_3=52$ و $S=1170$
 و بازاء $k=4$ داریم : $x_4=194$ و $S=16296$ و غیره.
 مسئله دارای بی نهایت جواب است .

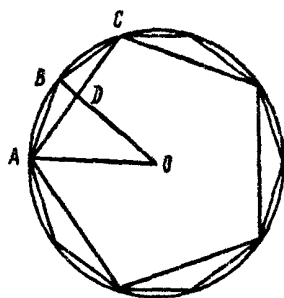
۷۹۵. فرض می کنیم : $AB=a_{10}$ ، $AC=a$ (شکل ۳۷) . ضلع $AC=2AD$ ، یعنی دو برابر ارتفاع مثلث AOB ، می باشد و در آن داریم :
 $AB=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ ، $AO=OB=R$. با این مفروضات بدست می آید :

$$a_5 = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

از این رابطه مقدار R بدست می آید و مساحت مورد نظر چنین میشود :

$$S = \frac{5}{2} a_5 OD = \frac{5}{2} a_5 \sqrt{R^2 - \frac{1}{4} a_5^2}$$

$$S = \frac{a^2}{4} \sqrt{25 - 10\sqrt{5}} \quad \text{جواب :}$$



شکل ۳۷

$$S = \frac{c^2}{2} \sqrt{\sqrt{5}-2} \quad \text{جواب :} \quad \text{۷۹۷}$$

$$r = \frac{2}{3} m \sqrt{3} \quad \text{جواب :} \quad \text{۷۹۸}$$

۷۹۹. جواب : مثلث متساوی الساقین .

$$S_c = 4\pi - 3\sqrt{3} \quad \text{جواب :} \quad \text{۸۰۰}$$

$$a = \frac{R}{2} \sqrt{6\pi\sqrt{3}} \quad \text{جواب :} \quad \text{۸۰۱}$$

۸۰۲. اضلاع مجاور به زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه را a و b و وتر آنرا c می گیریم ، بدست می آید :

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 ;$$

یعنی :

$$\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

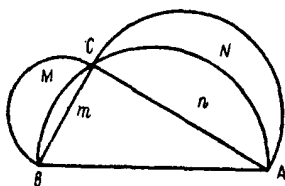
و این اثبات حکم مسئله است .

۸۵۳. مساحت هلالهای بین نیمدایره به قطر وتر و نیمدایره های بقطر اضلاع مجاور به زاویه قائمه را M و N و مساحت قطعه دایره های بین a و b ، اضلاع مجاور به زاویه قائمه ، و دایره به قطر وتر را m و n می گیریم (شکل ۳۸) . طبق مسئله قبل داریم :

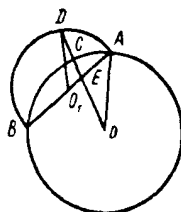
$$\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{4}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{یعنی :}$$

اگر از مساحت نیمدایره بزرگتر یعنی $\frac{\pi}{4}\left(\frac{c}{2}\right)^2$ مجموع $m+n$ را کم کنیم ، مساحت مثلث ABC بدست می آید (که آنرا با S نشان می دهیم) .



شکل ۳۸



شکل ۳۹

و اگر همین مجموع $m+n$ را از مجموع نیمدایره های بقطر اضلاع a و b یعنی :

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{4}\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

کم کنیم مجموع $M+N$ بدست می آید . باین ترتیب :

$$M+N=S$$

۸۵۴. داریم (شکل ۳۹) :

$$AO = AO_1 \sqrt{2} ; AO_1 = \frac{1}{2} AB ; \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \widehat{AO_1D}$$

مساحت قطاع OAC برابر است با مساحت قطاع $O\backslash AD$ یعنی :

$$S_{OAE} + S_{AEC} = S_{O\backslash ED} + S_{AEC} + S_{ACD}$$

$$S_{ACD} = S_{AOE} - S_{O\backslash ED} \quad \text{واز آنجا :}$$

(منظور از $\overline{ABC}$ ، مثلث ABC است).

تفاضل مساحت دو مثلث و بنا بر این مساحت مربع، برابر با این تفاضل را همیشه می توان به کمک خط کش و پرگار ساخت، مساحت مربع بدست آمده هم مساحت مثلث منحنی الخط است که می بایستی ثابت کنیم.

۸۵۵. شعاع دایره را R ، ضلع مربع را a_4 و ضلع مثلث متساوی الاضلاع را a_3 می گیریم، بنابراین :

$$\pi R^2 = a_4^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a_3^2$$

$$a_4 = R\sqrt{\pi} \quad ; \quad a_3 = \frac{2R\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \quad \text{از آنجا :}$$

$$\sqrt{\pi} : 2 : \sqrt{2\pi} \quad \text{جواب :}$$

۸۵۶. مساحت مورد نظر برابر است با مساحت

لوزی $ONCM$ منهای مساحت قطاع $ONmMO$

(شکل ۴۰). لوزی از دو مثلث متساوی الاضلاع به

ضلع r تشکیل شده است و مساحت قطاع برابر

است با $\frac{1}{6}$ مساحت دایره، از آنجا مساحت مجهول

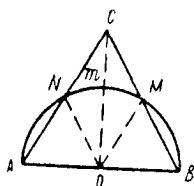
$$S = \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3} - \frac{1}{6} \pi r^2 \quad \text{چنین می شود :}$$

$$S = \frac{r^2}{6} (3\sqrt{3} - \pi) \quad \text{جواب :}$$

۸۵۷. مساحت مجهول Q برابر است با مساحت مثلث ABC منهای سه برابر

مساحت قطاع Anm (شکل ۴۱). اگر شعاع هریک از دایره های محاطی

را r فرض کنیم، $AB = 2r$ می شود.



شکل ۴۰

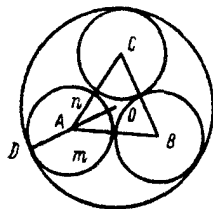
واز آنجا :

$$Q = \frac{1}{4}(\sqrt{r})^2 \sqrt{r} - 3 \times \frac{1}{6} \pi r^2 =$$

$$= r^2 \left(\sqrt{r} - \frac{\pi}{2} \right)$$

حالا r را محاسبه می‌کنیم :

$$a_r = OA \sqrt{r} ;$$



شکل ۴۱

از طرف دیگر :

$$OA = OD - AD = R - r ;$$

از آنجا :

$$\sqrt{r} = (R - r) \sqrt{r} \Rightarrow r = R(\sqrt{r} - 1)$$

که با قراردادن مقدار r مساحت مورد نظر بدست می‌آید :

$$Q = 2R^2(\sqrt{r} - 1)^2 \left(\sqrt{r} - \frac{\pi}{2} \right) : \text{جواب}$$

۸۵۸. شعاع دایره مورد نظر را R می‌گیریم ، روشن است که مراکز چهار دایره محاطی رئوس مربعی است بضلع $2R$ و قطر $2(r - R)$ و بنابراین خواهیم داشت :

$$2R^2 = 2(r - R)^2 \Rightarrow R = (\sqrt{r} - 1)r$$

و مساحت مورد نظر چنین میشود :

$$S = \pi(3 - 2\sqrt{r})r^2$$

* ۸۵۹ جواب : ۶ دایره .

$$Q = \frac{2}{3}R^2(3\sqrt{r} - \pi) : \text{جواب} \quad ۸۱۰$$

۸۱۱. عرض حلقه را z و شعاع دایره مفروض را r می‌گیریم . ثابت می‌کنیم $z = r$ است .

مساحت حلقه چنین است :

$$\pi(2r + z)^2 - \pi(2r)^2 = 4\pi r^2$$

و یا پس از تبدیلات ساده خواهیم داشت :

$$z^2 + 6rz - 7r^2 = 0 \Rightarrow z = r$$

۸۱۲. مساحت AFDHCB را S می‌گیریم. داریم:

$$S = \pi \left(\frac{AC}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} (AD^2 + DC^2) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{8} [AC^2 - (AD^2 + DC^2)] ;$$

از طرف دیگر:

$$AC = AD + DC ;$$

$$AD \cdot DC = BD^2$$

بنابراین:

$$S = \frac{\pi}{4} AD \cdot DC = \pi \left(\frac{BD}{2} \right)^2$$

۸۱۳. (۱) می‌توان مساحت حلقه را واسطه هندسی بین مساحت‌های دایره مفروض و دایره مجهول گرفت. اگر شعاع دایره کوچکتر را x بگیریم داریم:

$$\frac{\pi R^2}{\pi(R^2 - x^2)} = \frac{\pi(R^2 - x^2)}{\pi x^2} ;$$

یعنی:

$$x^2 + Rx - R^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{R}{2} (1 \pm \sqrt{5})$$

$$x^2 - Rx - R^2 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{R}{2} (1 \pm \sqrt{5})$$

از چهار جواب بالا باید جوابهای مثبت را انتخاب کرد:

$$x_1 = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1) < R$$

$$x_2 = \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1) > R$$

x_1 جواب مسئله است و x_2 با توجه به فرض این حالت جواب مسئله نیست. (۲) می‌توان مساحت دایره مجهول را واسطه هندسی بین مساحت دایره مفروض و مساحت حلقه گرفت.

در اینصورت:

$$\frac{\pi R^2}{\pi x^2} = \frac{\pi x^2}{\pi(R^2 - x^2)}$$

$$x^4 + R^2 x^2 - R^4 = 0 \quad \text{یعنی:}$$

از چهار جوابی که این معادله دارد تنها یکی در شرایط مسئله صدق می‌کند:

$$x_2 = \sqrt{\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}-1)} = \sqrt{R \cdot \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

باین ترتیب طول شعاع دایره مورد نظر برابر است با واسطه هندسی بین شعاع دایره مفروض و قطعه بزرگتر این شعاع بشرطی که به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد.

$$x_2 = \frac{R}{2} \sqrt{2(\sqrt{5}-1)}, \quad x_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{جواب:}$$

§ ۱۴. مسائل هندسه فضائی

۸۱۴. ضلع مکعب را x و قطر قاعده را y می‌گیریم: $y = x\sqrt{2}$
مساحت مقطع قطری چنین خواهد بود:

$$S = xy = x^2 \sqrt{2}$$

واز آنجا بدست می‌آید:

$$x = \sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{2}}; \quad y = \sqrt{S\sqrt{2}}$$

$$d = \sqrt{\frac{3S\sqrt{2}}{2}} \quad \text{وقطر مکعب:}$$

$$S_1 = 3S\sqrt{2} \quad \text{سطح کل مکعب:}$$

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{S^3 \sqrt{2}} \quad \text{وحجم آن:}$$

۸۱۵. اگر طول قطر قاعده هرم را d بگیریم، داریم:

$$Q = \frac{1}{2}ad \Rightarrow d = \frac{2Q}{a}$$

ولی مجذور قطر مربع برابر باد و برابر مساحت آنست ، بنابراین مساحت قاعده هرم چنین می شود :

$$S = \frac{2Q^2}{a^2}$$

و از آنجا حجم هرم بدست می آید .

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{Q^2}{a} \quad \text{جواب :}$$

۸۱۶. اگر یکی از مثلثهای وجوه جانبی هرم و مثلاً ASB را قاعده بگیریم مسئله بسادگی حل می شود . فرض می کنیم :

$AS = x$ ، $BS = y$ و $CS = z$ ، در این صورت حجم مطلوب چنین است :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{xy}{2} \cdot z = \frac{xyz}{6}$$

از طرف دیگر در مثلثهای قائم الزاویه BSC ، ASC و ASB روابط زیر را داریم :

$$y^2 + z^2 = a^2 ;$$

$$x^2 + z^2 = b^2 ;$$

$$x^2 + y^2 = c^2 .$$

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)} ; \quad \text{و از آنجا :}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)} ;$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)} .$$

جواب :

$$V = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}$$

۸۱۷. با توجه به رابطه هرون ، مساحت مثلث ABC را پیدا می کنیم پس از

ساده کردن چنین خواهد شد :

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$$

حجم هرم چنین است :

$$V = \frac{abc}{6} = \frac{ON \cdot S}{3}$$

وازا آنجا :

$$ON = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

۸۱۸. فرض می‌کنیم $SB = x$ ، $SC = y$ و $SD = z$ باشد .

SM میانه مثلث SBD است و داریم (مسئله ۷۱۵) :

$$SM = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x^2 + 2z^2 - BD^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x^2 + 2z^2 - a^2} \quad (۱)$$

بهمین ترتیب درمثلث SAC داریم :

$$SM = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2a^2 + 2y^2 - AC^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2a^2 + 2y^2 - 3a^2} \quad (۲)$$

زیرا داریم : $BD = a$ و $AC^2 = 4a^2 - BD^2 = 3a^2$

و باتوجه به روابط (۱) و (۲) بسادگی بدست می‌آید :

$$y^2 = x^2 + z^2$$

۸۱۹. در شکل ۴۲ قطع هرم با صفحه‌ای که از رأس و قطر قاعده آن می‌گذرد،

داده شده است . از تشابه دو مثلث OLC و

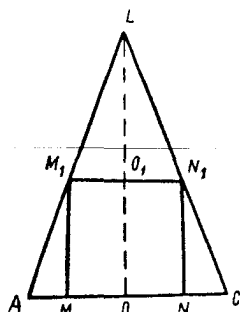
O_1LN_1 بدست می‌آید :

$$\frac{OL}{O_1L} = \frac{OC}{O_1N_1} ; \quad (۱)$$

که اگر $NN_1 = x$ ضلع مکعب باشد داریم :

$$OL = h ; O_1L = h - x ;$$

$$O_1N_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} ; OC = \sqrt{a^2 - h^2}$$



شکل ۴۲

اگر این مقادیر را در رابطه (۱) قرار دهیم ، بدست می آید :

$$\frac{h}{h-x} = \frac{\sqrt{a^2 - h^2} \cdot \sqrt{2}}{x}$$

$$x = \frac{h\sqrt{2(a^2 - h^2)}}{h + \sqrt{2(a^2 - h^2)}} \quad \text{جواب :}$$

$$x = \frac{60(6\sqrt{2} - 5)}{47} \quad \text{۸۲۰. جواب :}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{32}, \quad S = \frac{3}{4}a^2 \quad \text{۸۲۱. جواب :}$$

۸۲۲. پس از گسترش مخروط ، قطاعی بدست می آید که شعاع آن برابر با l مولد و طول قوس قطاع برابر با محیط قاعده مخروط $2\pi R$ است (R را شعاع قاعده مخروط گرفته ایم) .
بنابراین :

$$\frac{\pi l \times 36}{180} = 2\pi R \Rightarrow l = 10R$$

و سطح جانبی مخروط :

$$S = \pi R l = 10\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{10\pi}}$$

و ارتفاع مخروط :

$$h = \sqrt{l^2 - R^2} = R\sqrt{99} = \sqrt{\frac{99S}{10\pi}}$$

و حجم مخروط :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{30}\sqrt{\frac{11S^3}{10\pi}}$$

۸۲۳. مولد مخروط را l و شعاع قاعده آنرا r می گیریم ، با توجه به فرض مسئله داریم :

$$\pi r l = 2\pi r^2 \Rightarrow l = 2r$$

یعنی مقطع مخروط با صفحه ای که از ارتفاع آن می گذرد يك مثلث

متساوی الاضلاع است .

پس از گسترش مخروط قطاعی از دایره بدست می آید که شعاع آن l و طول قوس آن $2\pi r$ است . اگر زاویه قطاع را α بگیریم داریم :

$$\frac{\pi l \alpha}{180^\circ} = 2\pi r \Rightarrow \alpha = \frac{2r \times 180^\circ}{l} = 180^\circ$$

۸۲۴. حجم جسمی که از دوران مثلث بدست می آید برابر است با مجموع حجمهای دو مخروط یعنی :

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

که در آن داریم : $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $h = \frac{a}{2}$, بنابراین :

$$V = \frac{1}{6}\pi a^3$$

۸۲۵. شبیه مسئله قبل حل میشود (در اینجا : $R=b$ و $h=\frac{a}{2}$) .

$$V = \frac{1}{3}\pi ab^2 \quad \text{جواب :}$$

۸۲۶. ارتفاعات مثلث را به h_a , h_b و h_c و حجم اجسامی که از دوران مثلث دور اضلاع a , b و c بدست می آید بترتیب به V_a , V_b و V_c نشان می دهیم . در هر دوران ، حجم جسمی که بدست می آید برابر است با مجموع حجمهای دو مخروط و داریم :

$$V_a = \frac{1}{3}\pi b a^2 \cdot a ; \quad V_b = \frac{1}{3}\pi h b^2 \cdot b ;$$

$$V_c = \frac{1}{3}\pi h c^2 \cdot c$$

اگر مساحت مثلث را به S نشان دهیم، داریم :

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$V_a = \frac{2}{3}\pi S h_a ; \quad V_b = \frac{2}{3}\pi S h_b ;$$

$$V_c = \frac{2}{3} \pi S h_c$$

و از آنجا بدست می آید :

$$V_a : V_b : V_c = h_a : h_b : h_c$$

واگر در نظر بگیریم که ارتفاعات هر مثلث متناسب با عکس اضلاع متناظر آنست خواهیم داشت :

$$V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

۸۲۷. حجم جسمی که از دوران مثلث دور ضلع a بدست می آید برابر است با مجموع (یا تفاضل) حجمهای دو مخروط که شعاع قاعده آنها مساوی h_a و مجموع (یا تفاضل) ارتفاعات آنها مساوی a است ، بنابراین داریم :

$$\frac{1}{3} \pi a h_a^2 = \frac{4}{3} \pi R^2 \Rightarrow a h_a^2 = 4 R^2 \quad (1)$$

اگر مساحت مثلث ABC را S بگیریم داریم :

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a \quad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) بدست می آید :

$$a = \frac{S^2}{R^2} \quad (3)$$

و به همین ترتیب برای دو ضلع دیگر مثلث داریم :

$$b = \frac{S^2}{r^2} \quad (4) \quad ; \quad c = \frac{S^2}{\rho^2} \quad (5)$$

S^2 را مناسبه می کنیم ، داریم :

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

از طرف دیگر :

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2} S^2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} \right) ;$$

$$p - a = \frac{1}{2} S^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2} \right) ;$$

$$p - b = \frac{1}{r} S^2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \right) ;$$

$$p - c = \frac{1}{r} S^2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) ;$$

از ضرب چهار رابطه فوق در یکدیگر بدست می آید :

$$S^2 = \frac{1}{16} S^4 k \Rightarrow S^2 = \sqrt[4]{\frac{r}{k}}$$

که در آن داریم :

$$k = \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} \right) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\rho^2} \right)$$

و اگر مقدار S^2 را در روابط (۳) و (۴) و (۵) قرار دهیم ، مقادیر اضلاع بدست می آید :

$$a = \frac{r}{R^2} \sqrt[4]{\frac{r}{k}} ; \quad b = \frac{r}{r^2} \sqrt[4]{\frac{r}{k}} ; \quad c = \frac{r}{\rho^2} \sqrt[4]{\frac{r}{k}}$$

۸۲۸. راه حل اول : فرض می کنیم شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ دور ضلع AB دوران کند . سطح جسمی که بدست می آید برابر است با مجموع سطوح جانبی : استوانه‌ای بامولد DE ، دو مخروط ناقص بامولدهای CD و EF و دو مخروط بامولدهای BC و AF .

اگر $BD = d$ باشد ، $NC = \frac{1}{3}d$ خواهد بود (N پای عمودی است که از C بر امتداد AB فرود آید) . در این صورت سطح کل حجم دوار چنین است :

$$S = 2\pi da + 2\pi \left(d + \frac{d}{3} \right) a + 2\pi \cdot \frac{d}{3} \cdot a = 6\pi ad = 6\sqrt[4]{r} \pi a^3$$

زیرا $d = a\sqrt[4]{3}$ مساوی قطر دایره محیطی شش ضلعی است .

حجم جسم دوار برابر است با حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده d و ارتفاع a

باضافه حجم دو مخروط ناقص با شعاعهای d و $\frac{d}{3}$ و ارتفاع $\frac{a}{3}$ منهای حجم دو

مخروط به شعاع $\frac{d}{2}$ و ارتفاع $\frac{a}{2}$:

$$V = \pi a d^2 + \frac{2}{3} \pi (d^2 + d \cdot \frac{d}{2} + \frac{d^2}{4}) \frac{a}{2} - \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{9}{2} \pi a^3$$

راه حل دوم: مسائلی از این قبیل را می توان با استفاده از دو قضیه زیر (قضایای گولدن) حل کرد :

(۱) سطح جسمی که از دوران قوس يك منحنی مسطحه (یا يك خط شکسته مسطحه) دور محوری که در همان صفحه است ، ولی خط منحنی (یا خط شکسته) را قطع نمی کند ، بدست می آید ، برابر است با حاصلضرب طول خط منحنی (یا خط شکسته) در طول راهی که مرکز ثقل این خط ضمن دوران طی می کند.

(۲) حجم جسمی که از دوران يك شکل مسطحه دور محوری که با آن در يك صفحه است ولی آنرا قطع نمی کند ، بدست آید ، برابر است با حاصلضرب سطح شکل دوار در طول راهی که مرکز ثقل منحنی ضمن دوران طی می کند .

مرکز ثقل يك شش ضلعی منتظم بر مرکز آن منطبق است ، بنابراین طول راهی که مرکز ثقل شش ضلع ضمن دوران دور AB طی می کند چنین است :

$$2\pi \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \pi a \sqrt{3}$$

و سطح کل جسم حاصل طبق قضیه اول گولدن میشود :

$$S = 6a \cdot \pi a \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \pi a^2$$

و حجم آن طبق قضیه دوم گولدن :

$$V = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} \cdot \pi a \sqrt{3} = \frac{9}{2} \pi a^3$$

$$V = \frac{9}{2} \pi a^3 , S = 6\sqrt{3} \pi a^2 \quad \text{جواب :}$$

$$829. \quad V_t : V_m = 3 : 4 : V_t = \pi a^3 \quad \text{جواب :}$$

830. سطح جسمی که از دوران بدست می آید تشکیل شده است از سطوح جانبی دو مخروط ناقص مساوی و سطوح جانبی داخلی دو مخروط مساوی . شعاع قاعده بزرگتر مخروط ناقص برابر است با قطر بزرگتر لوزی :

$$R = \sqrt[2]{a^2 - \frac{a^2}{r}} = a\sqrt{r}$$

و شعاع قاعده کوچکتر مخروط ناقص و شعاع قاعده مخروط :

$$r = \frac{R}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{r}$$

و مولد مخروطها برابر است با a .

بنا بر این سطح و حجم مورد نظر چنین میشود :

$$S = 4\pi a^2\sqrt{r} ; \quad V = \frac{3}{2}\pi a^3$$

راه حل دوم : مرکز ثقل لوزی بر محل تلاقی اقطار آن واقع است و مسافت طی شده بوسیله مرکز ثقل :

$$2\pi \cdot \frac{a\sqrt{r}}{2} = \pi a\sqrt{r}$$

در نتیجه سطح و حجم مورد نظر چنین است :

$$S = 4a \cdot \pi a\sqrt{r} = 4\sqrt{r}\pi a^2 ;$$

$$V = \frac{1}{2}a^2\sqrt{r} \cdot \pi a\sqrt{r} = \frac{3}{2}\pi a^3.$$

۸۳۱. طبق قضیه اول گولدن سطح جسم دوار چنین است :

$$S = 6a \cdot 2\pi a = 12\pi a^2$$

و طبق قضیه دوم گولدن حجم جسم دوار چنین است :

$$V = \frac{3}{2}a^2\sqrt{r} \cdot 2\pi a = 3\sqrt{r}\pi a^3$$

۸۳۲. جواب :

$$S = \frac{2\pi(a+b)ab}{\sqrt{a^2+b^2}} ; \quad V = \frac{2\pi a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۷۳۳. اضلاع متوازی الاضلاع را a و b و ارتفاعات متناظر آنها را h و h_1 می گیریم . V و V_1 حجم اجسامی که از دوران متوازی الاضلاع دور اضلاع a و b بدست می آید چنین است :

$$V = \pi a h^2 ; \quad V_1 = \pi b h_1^2$$

و با توجه به رابطه $ah = bh_1$ بدست می آید :

$$\frac{V}{V_1} = \frac{ah^2}{bh_1^2} = \frac{h}{h_1} = \frac{b}{a}$$

۸۳۴. سطح مورد نظر برابر است با سطح کل یک مخروط ناقص باضافه سطح جانبی یک مخروط منهای سطح قاعده این مخروط .

شعاع قاعده پائین مخروط ناقص $R = a$ و شعاع قاعده بالای آن :

$$r = b + \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$r_1 = \frac{1}{2}(a-b) \quad \text{شعاع قاعده مخروط :}$$

و مولد مخروطها مساوی c است .

از آنجا سطح مورد نظر چنین میشود :

$$\begin{aligned} S_t &= \pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2 + \pi r_1 l - \pi r_1^2 = \\ &= \pi \left[\left(a + \frac{a+b}{2} \right) c + a^2 + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{a-b}{2} c - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \pi(2ac + a^2 + ab) = \pi a(a+b+2c) \end{aligned}$$

۸۳۸. R را شعاع کره محیطی و r را شعاع کره محاطی چند وجهی می گیریم در اینصورت جوابها چنین است :

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4} ; r = \frac{a\sqrt{6}}{12} \quad \text{برای چهار وجهی :}$$

$$R = a\sqrt{3} ; r = \frac{1}{3}a \quad \text{برای شش وجهی :}$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} ; r = \frac{a\sqrt{6}}{6} \quad \text{برای ۸ وجهی :}$$

برای ۱۲ وجهی :

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{18+6\sqrt{5}} ; r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$$

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} ; r = \frac{a}{12}\sqrt{3(3+\sqrt{5})} \quad \text{برای ۲۰ وجهی :}$$

۸۳۹. جواب (عدد زیر S نماینده تعداد وجوه چند وجهی است) :

$$S_4 = a^2 \sqrt{3} ; S_6 = 6a^2 ; S_8 = 2\sqrt{3} a^2 ;$$

$$S_{12} = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} ; S_{20} = 5\sqrt{3} a^2$$

۸۴۰. جواب :

$$V_4 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12} ; V_6 = a^3 ; V_8 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} ;$$

$$V_{12} = \frac{a^3}{4} \sqrt{10(47 + 21\sqrt{5})} ; V_{20} = \frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5})$$

۸۴۱. سطح کل چهار وجهی و هشت وجهی منتظم بترتیب چنین اند :

$$a^2 \sqrt{3} ; 2\sqrt{3} a_1^2$$

طبق فرض مسئله داریم :

$$a^2 \sqrt{3} = 2\sqrt{3} a_1^2 \Rightarrow a^2 = 2a_1^2 \Rightarrow a = \sqrt{2} a_1$$

حجم چهار وجهی و هشت وجهی منتظم بترتیب چنین می شود :

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} ; V_1 = \frac{a_1^3 \sqrt{2}}{3}$$

و نسبت این دو حجم :

$$\frac{V}{V_1} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{4a_1^3 \sqrt{2}} = \frac{a^3}{4a_1^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V : V_1 = \sqrt{2} : 2 \quad \text{جواب}$$

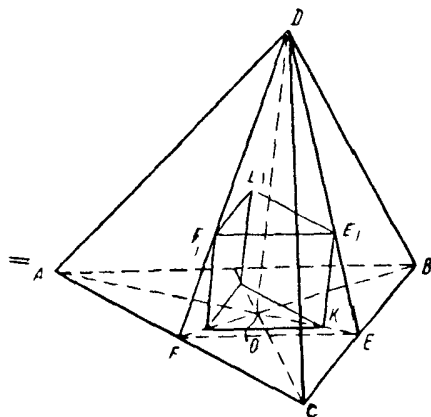
$$. V = \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{27} , S = \frac{2}{3} \pi a^2 \quad \text{جواب : ۸۴۲}$$

۸۴۳. يك چهار وجهی منتظم در نظر می گیریم (شکل ۴۳) . ارتفاع این چهار وجهی :

$$DO = h = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} ;$$

که در آن داریم :

$$AO = R = \frac{a}{\sqrt{3}} ;$$



شکل ۴۳

$$EF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

از تشابه دو مثلث E_1DF_1 و EDF بدست می آید :

$$\frac{E_1F_1}{EF} = \frac{DE_1}{DF} = \frac{\frac{2}{3}DE}{DE} = \frac{2}{3};$$

و از آنجا :

$$E_1F_1 = \frac{2}{3}EF = \frac{a}{3}$$

بنابراین سطح قاعده منشور
چنین می شود :

$$S = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{3} \right)^2 \sqrt{3} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{36}$$

از تشابه دو مثلث DOE و E_1KE بدست می آید :

$$\frac{E_1K}{h} = \frac{E_1E}{DE} = \frac{\frac{1}{3}DE}{DE} = \frac{1}{3};$$

و از آنجا :

$$E_1K = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{6}}{9}$$

و ارتفاع منشور محاطی :

$$h_1 = 2 \times E_1K = \frac{2a\sqrt{6}}{9}$$

و حجم این منشور :

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{36} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{9} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{54}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{54} a^3 : \text{جواب}$$

$$۸۴۴. \text{ جواب : } \frac{6}{\pi}$$

۸۴۵. شعاع کره محاط در ۲۰ وجهی منتظم چنین است (مسئله ۸۳۸ را به بینید) :

$$r = \frac{a\sqrt{r}(r+\sqrt{5})}{12}$$

و حجم این کره :

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{r}(r+\sqrt{5})^3}{432}$$

حجم خود ۲۰ وجهی با توجه به مسئله ۸۴۰ چنین است :

$$V = \frac{5a^3(r+\sqrt{5})}{12}$$

$$\text{جواب : } \frac{V}{V_1} = \frac{15\sqrt{r}(r-3\sqrt{5})}{2\pi}$$

۸۴۶. چند وجهی دلخواهی بر کره بشعاع R محیط می کنیم و آنرا به هرمهایی به رأس مرکز کره تجزیه می کنیم ، حجم هریک از این هرمها برابر است با حاصلضرب سطح وجهی از چند وجهی که قاعده هرم است در ثلث شعاع کره و بنابراین حجم مجموع هرمها (حجم چند وجهی) چنین است :

$$V = S \cdot \frac{R}{3} ;$$

که در آن S عبارتست از سطح کل چند وجهی .

از اینجا بسادگی بدست می آید : $v: S=R$:

۸۴۷. اگر ضلع ۸ وجهی منتظم را a فرض کنیم ، شعاع کره محیطی آن چنین میشود (مسئله ۸۳۸) :

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$$

و سطح این کره :

$$Q = 4\pi R^2 = 2\pi a^2$$

و سطح هشت وجهی منتظم :

$$S = 2a^2\sqrt{3}$$

با حذف a از این دو رابطه خواهیم داشت :

$$S = \frac{Q\sqrt{r}}{\pi}$$

۸۴۸. جواب :

$$S = \frac{\pi a^2}{3} ; V = \frac{\pi \sqrt{3} a^3}{54}$$

۸۴۹. راهنمایی : اگر سطح کل و حجم مخروط را بر حسب شعاع کره بدست آوریم ، چنین میشود :

$$S = 8\pi R^2 ; V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

۸۵۰. اگر شعاع قاعده های مخروط ناقص را به ترتیب R_1 و r فرض کنیم ، با توجه به فرض مسئله داریم :

$$\frac{R_1^2}{r^2} = 2 \Rightarrow R_1 = r\sqrt{2}$$

مولد مخروط ناقص : $R_1 + r = r(\sqrt{2} + 1)$ و ارتفاع مخروط $2R$ و تصویر مولد بر قاعده مخروط : $R_1 - r = r(\sqrt{2} - 1)$ میشود و از آنجا :

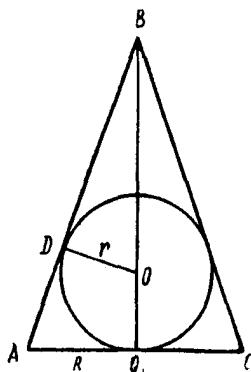
$$[r(\sqrt{2} + 1)]^2 = 4R^2 + [r(\sqrt{2} - 1)]^2 \Rightarrow r^2 = \frac{R^2 \sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{\pi R^3}{3} (3\sqrt{2} + 2) \quad \text{جواب :}$$

۸۵۱. حجم مخروطی که محیط بزرگ کره باشد بستگی به ارتفاع و شعاع قاعده آن دارد ، اگر شعاع قاعده را R و ارتفاع مخروط را h فرض کنیم (شکل ۴۴) حجم مخروط چنین است :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

از تشابه دو مثلث ABO_1 و DBO بدست می آید :



شکل ۴۴

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{\sqrt{h(h-2r)}} \Rightarrow R^2 = \frac{r^2 h}{h-2r}$$

بنابراین :

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2 h^2}{h-2r} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h-2r}$$

می‌نیم مقدار V همراه با می‌نیم مقدار $\frac{h^2}{h-2r}$ و یا ماکزیمم عکس آنست.

عکس عبارت فوق را باین ترتیب تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{h-2r}{h^2} = \frac{1}{h} \left(1 - \frac{2r}{h} \right) = \frac{1}{2r} \cdot \frac{2r}{h} \cdot \left(1 - \frac{2r}{h} \right)$$

و این عبارت وقتی ماکزیمم است که عوامل $\frac{2r}{h}$ و $1 - \frac{2r}{h}$ برابر باشند یعنی :

$$\frac{2r}{h} = 1 - \frac{2r}{h} \Rightarrow h = 4r = 2(2r)$$

بنابراین حجم مخروط محیط بر کره وقتی می‌نیم است که ارتفاع آن دو برابر قطر کره باشد .

جواب : $V = \frac{8}{3} \pi r^3$

۸۵۲. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه محاطی را بترتیب r و h می‌گیریم

(شکل ۴۵) ، در اینصورت حجم استوانه

چنین است : $V = \pi r^2 h$

از مثلث AOO_1 بدست می‌آید :

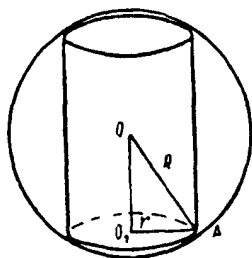
$$R^2 = r^2 + \frac{1}{4} h^2 \Rightarrow$$

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

بنابراین :

$$V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

تبدیلات زیر را انجام دهیم :



شکل ۴۵

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{V}{2\pi}\right)^2 = \frac{r^4}{4}(R^2 - r^2) = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (R^2 - r^2)$$

می‌بینیم که مجموع این سه عامل متغیر مقداری است ثابت و مساوی R^2 ،
بنابراین (مسئله ۷۵۳ را به بینید) حجم V وقتی ماکزیمم است که
داشته باشیم :

$$\frac{r^2}{2} = R^2 - r^2 \Rightarrow r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} : r = \frac{R\sqrt{6}}{3} \quad \text{جواب :}$$

$$۸۵۳. \quad \frac{۳۲}{۹} \quad \text{جواب :}$$

۸۵۴. راهنمایی : دستگاه معادلات زیر را تشکیل دهید :

$$\begin{cases} V = \frac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)h \\ m^2 = (R + r)h \end{cases}$$

که باحل آن مقادیر R و r بدست می‌آید .

جواب :

$$R = \frac{1}{2h} \left(m^2 + \sqrt{\frac{3(4hv - \pi m^4)}{\pi}} \right)$$

$$r = \frac{1}{2h} \left(m^2 - \sqrt{\frac{3(4hv - \pi m^4)}{\pi}} \right)$$

۸۵۵. h را ارتفاع مخروط ، l مولد و r را شعاع قاعده آن فرض می‌کنیم.

طبق فرض مسئله داریم :

$$\pi r l = 3\pi r^2 \Rightarrow l = 3r$$

و بنابر قضیه فیثاغورث داریم :

$$h^2 + r^2 = l^2 \Rightarrow h^2 + r^2 = 9r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{h^2}{8}$$

و چون حجم کره با حجم مخروط برابر است داریم :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

که اگر بجای r^2 مقدارش را قرار دهیم بدست می آید :

$$4R^3 = \frac{1}{\lambda} h^2 \Rightarrow h = 2R\sqrt[4]{\lambda}$$

۸۵۶. شعاع قاعده ، مولد و ارتفاع مخروط را بترتیب r ، l و h می گیریم ، داریم :

$$\pi r l = 60 \quad (1)$$

سطح کل مخروط را محاسبه می کنیم (یعنی سطح مثلث را با معلوم بودن سه ضلع آن) :

$$S = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} = 84$$

و بنابراین :

$$\pi r^2 + 60 = 84 \Rightarrow r^2 = \frac{24}{\pi} \quad (2)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) بدست می آید :

$$l^2 = \frac{150}{\pi} \quad (3)$$

علاوه بر آن :

$$h^2 = l^2 - r^2$$

از آنجا ، بادر نظر گرفتن روابط (۲) و (۳) ، خواهیم داشت :

$$h = \sqrt{\frac{126}{\pi}}$$

شعاع کره مطلوب را R می گیریم ، داریم :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow R^3 = \frac{6}{\pi} \sqrt{\frac{126}{\pi}}$$

$$R = \sqrt[6]{\frac{36 \times 126}{\pi^3}}$$

یا :

محاسبات لگاریتمی را انجام می دهیم :

$$\frac{1}{9} \log 36 = 0.2594 ;$$

$$\frac{1}{9} \log 126 = 0.2501 ;$$

$$\frac{1}{9} \operatorname{colog} \pi = 1.7516 ;$$

$$\log R = 0.3611$$

جواب : $R \approx 2/3^m$

۸۵۷. شعاع قاعده مخروط و شعاع کره را بترتیب R و r می گیریم ، داریم :

$$R : r = n \Rightarrow R = nr$$

همچنین اگر حجم مخروط و حجم کره را بترتیب V و v بگیریم ، داریم :

$$V : v = m \Rightarrow V = mv$$

و از آنجا .

$$\frac{1}{3} \pi R^2 h = m \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow n^2 r^2 h = 4 m r^3$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$r = \frac{hn^2}{4m} ; R = \frac{hn^3}{4m}$$

علاوه بر آن داریم :

$$l^2 = h^2 + R^2$$

از اینجا طول مولد مخروط بدست می آید :

$$l = \frac{h}{4m} \sqrt{16m^2 + n^2}$$

از تشابه دوشکل ADS و KOS بدست می آید (شکل ۴۶) :

$$\frac{OS}{l} = \frac{r}{R} \Rightarrow OS = \frac{rl}{R}$$

$$OS = \frac{h}{4mn} \sqrt{16m^2 + n^2} \quad \text{جواب :}$$

۸۵۸. در شکل ۴۶ مقطع اصلی مخروط با کره داخل آن و سطح AB آبی

A diagram of a triangle with vertices A , B , and S . The base is AB and the apex is S . A circle is inscribed within the triangle, tangent to all three sides. The center of the circle is labeled O . A vertical line segment SD is drawn from the apex S to the base AB , passing through the center O . The point D is on the base AB . A radius OK is drawn from the center O to the side AS , where K is the point of tangency.

شکل ۴۶

$O_2F=r_2$ می گیریم ، از تشابه دومیث

شکل ۴۷

BOS و $\text{F'O}_\text{P}\text{S}$ بدست می آید :

$$\frac{r_\gamma}{R} = \frac{x}{H} \Rightarrow r_\gamma = \frac{Rx}{H} ;$$

$$V = \frac{\pi}{3} r_\gamma^2 x = \frac{\pi R^2 x^3}{3H^2}$$

حالا اگر در رابطه (۱) بجای V و V_γ و v مقادیرشان را قرار دهیم ، پس از عملیات ساده جبری ارتفاع مجهول بدست می آید .

$$x = \sqrt[3]{h^2 + \frac{4H^2 r^2}{R^2}} : \text{ جواب}$$

۸۶۰. اگر شعاع قاعده ، مولد و ارتفاع مخروط را به ترتیب R و l و h بگیریم (شکل ۴۸) ، طبق فرض مسئله داریم :

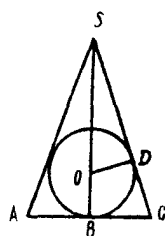
$$\pi R(R+l) = 4\pi r^2 \cdot k \quad (۱)$$

علاوه بر آن :

$$h^2 = l^2 - R^2 \quad (۲)$$

از تشابه دو مثلث BCS و ODS بدست می آید :

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{l-R} \quad (۳)$$



شکل ۴۸

که بادر نظر گرفتن رابطه (۲) چنین میشود :

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{l-R} = \sqrt{\frac{l+R}{l-R}}$$

این رابطه را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} = \frac{l}{R}$$

مقدار l را از رابطه (۱) استخراج می کنیم :

$$l = \frac{4r^2 k - R^2}{R} \quad (۴)$$

و در رابطه فوق قرار می دهیم :

$$\frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} = \frac{4r^2 k - R^2}{R^2}$$

$$R^4 - 2r^2 k r^2 + 2r^4 k = 0 \quad \text{و یا :}$$

$$R^2 = r^2 (k \pm \sqrt{k^2 - 2k}) \quad (5) \quad \text{واز آنجا :}$$

از روابط (۲) ، (۴) و (۵) نتیجه می گیریم :

$$h^2 = 4r^2 (k \pm \sqrt{k^2 - 2k})^2$$

$$h = 2r (k \pm \sqrt{k^2 - 2k}) \quad \text{جواب :}$$

۸۶۱. در شکل ۴۹ مقطع قائم مخروط و کره ها داده شده است . حجم دو کره متناسب با مکعب اشعه آنهاست ، بنابراین اگر شعاع کره بزرگتر R باشد داریم :

$$\frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow R = 2r$$

چون O_1N مساوی نصف OM و موازی آنست ، بنابراین خواهیم داشت :

$$BO_1 = O_1O = 3r ;$$

و ارتفاع کل مخروط : $h = 8r$ خواهد بود.

از تشابه دو مثلث BDC و BO_1N بدست می آید :

$$\frac{DC}{BC} = \frac{O_1N}{BO_1} \Rightarrow$$

$$\frac{R_1}{l} = \frac{r}{3r} \Rightarrow l = 3R_1$$

شکل ۴۹

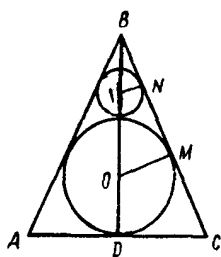
که در آن $R_1 = DC$ و $l = BC$ می باشد .

از طرف دیگر داریم :

$$l^2 - R_1^2 = h^2 \Rightarrow 9R_1^2 - R_1^2 = 64r^2 \Rightarrow R_1^2 = 16r^2$$

وسط جانبی مخروط :

$$S = \pi R_1 l = 24\pi r^2$$



و حجم مخروط :

$$V = \frac{1}{3} \pi R_1^2 h = \frac{64 \pi r^3}{3}$$

۸۶۲. جواب : $4\pi Rr$

۸۶۳. از مثلث قائم الزاویه ADC (شکل ۵۰) ارتفاع استوانه را بدست می آوریم :

$$H = \sqrt{4R^2 - r^2} = R\sqrt{3} ;$$

$$h = \frac{2R - H}{2} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{3})$$
 و ارتفاع قطعه :

شعاع قاعده استوانه و قطعه : $r = \frac{R}{2}$

اگر حجم استوانه را V_1 و حجم هریک از دو قطعه کروی را V_2 و حجم باقیمانده کره را V فرض کنیم ، داریم :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 - (2V_2 + V_1) = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{2}$$

شکل ۵۰

۸۶۴. فاصله مجهول را $OO_1 = x < R$ می گیریم ، از مثلث AO_1O (شکل ۵۱) داریم :

$$AO_1^2 = R^2 - x^2$$

وسطح قاعده هرم :

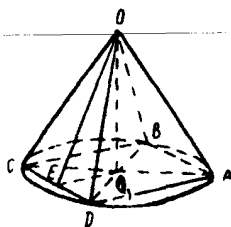
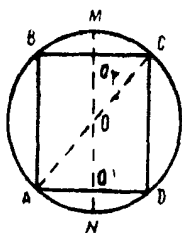
$$Q = 2AO_1^2 = 2(R^2 - x^2)$$

وضلع قاعده هرم :

$$a = \sqrt{Q} = \sqrt{2(R^2 - x^2)}$$

و سهم هرم :

$$l = OE = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 + x^2}$$



شکل ۵۱

$$2al + Q = 2m^2 \quad \text{وسطح کل هرم :}$$

$$2\sqrt{2(R^2 - x^2)}\sqrt{\frac{R^2 + x^2}{2}} + 2(R^2 - x^2) = 2m^2 \quad \text{یا :}$$

$$\sqrt{R^4 - x^4} + R^2 - x^2 = 2m^2$$

$$x^4 + (2m^2 - R^2)x^2 + 2m^2(m^2 - R^2) = 0 \quad (1) \quad \text{یعنی :}$$

$$\text{یا با فرض } z = x^2 :$$

$$z^2 + (2m^2 - R^2)z + 2m^2(m^2 - R^2) = 0 \quad (2)$$

بحث : (۱) اگر $m^2 > R^2$ باشد ، عبارت سمت چپ معادله (۱) بازاء همه مقادیر x مثبت می شود و مسئله جواب ندارد .

(۲) اگر $m^2 = R^2$ باشد ، $x = 0$ می شود یعنی ، صفحه مورد نظر از مرکز کره می گذرد .

(۳) اگر $m^2 < R^2$ باشد ، معادله (۲) دو ریشه مختلف علامه خواهد داشت : $z_1 < 0$ و $z_2 > 0$. یعنی مسئله دارای یک جواب است : $x = \sqrt{z_2}$

$$V = 370 \text{ cm}^3 \quad \text{جواب :}$$

۸۶۶. α را زاویه مجهول و h و r و l را بترتیب ارتفاع ، شعاع قاعده و مولد مخروط می گیریم ، داریم :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r} ;$$

سطح کل مخروط طبق فرض دو برابر سطح مقطع محوری استوانه است ، بنایراین :

$$\pi(r+l)r = 2 \times 2rh \Rightarrow \pi(r+l) = 4h$$

$$l = \sqrt{x^2 + h^2} \quad \text{علاوه بر آن :}$$

ازدورابطه اخیر بدست می آید :

$$4h - \pi r = \pi \sqrt{r^2 + h^2} \Rightarrow h(4 - \pi) = \pi r$$

واز آنجا :

$$\frac{h}{r} = \frac{8\pi}{16 - \pi^2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{8\pi}{16 - \pi^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{8\pi}{16 - \pi^2} : \text{جواب}$$

۸۶۷. جواب : ۶۰ درجه

۸۶۸. سه رابطه زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$S = \pi r(l + r) ;$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h ;$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

با حذف h و l از این روابط به معادله دوم‌جذوری زیر می‌رسیم :

$$2S\pi r^2 - S^2 r^2 + 9V^2 = .$$

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S^2 \pm \sqrt{S^4 - 72\pi S V^2}}{\pi S}} : \text{جواب}$$

۸۶۹. جواب : $1/4$ متر مکعب .

$$V = \frac{500\pi}{3}, S = 100\pi : \text{جواب}$$

۸۷۱. در شکل ۵۲ مقطع اصلی مخروط داده شده است . اگر پاره خط SC

به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد ، داریم :

$$\frac{OS}{SC} = \frac{OC}{OS} \Rightarrow OS^2 = SC \cdot OC$$

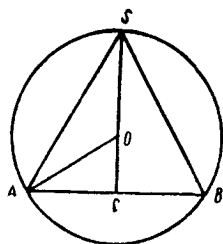
حجم کره را V و حجم مخروط را v می‌گیریم ،

در اینصورت داریم :

$$= \frac{4}{3} \pi OS^3 = \frac{4}{3} \pi OS^2 \cdot OS = \frac{4}{3} \pi OS \cdot OC \cdot OS :$$

$$v = \frac{\pi}{3} AC^2 \cdot SC = \frac{\pi}{3} \cdot OC \cdot OS \cdot SC$$

با توجه به مثلث AOC می‌توان نوشت :



شکل ۵۲

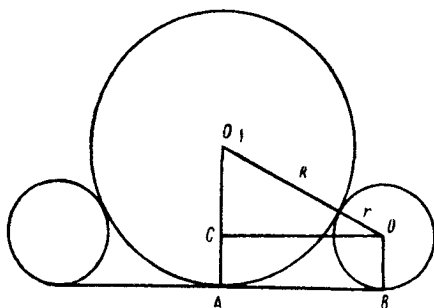
$$AC^2 = AO^2 - OC^2 = OS^2 - OC^2 = \\ = SC \cdot OC - OC^2 = OC(SC - OC) = OC \cdot OS$$

$$\frac{V}{v} = 4 \quad \text{و از آنجا نتیجه می گیریم:}$$

۸۷۲. در شکل ۵۳ مقطع مرکزی حلقه و کره داخلی آن که در نقطه A بر میز مماس است داده شده است. شعاع کره را R فرض می کنیم، طبق شرط مسئله داریم:

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$



شکل ۵۳

مرکز ثقل دایره شعاع r که دور محور O1A دوران می کند بر مرکز آن منطبق است و طول مسیری که این

مرکز ثقل ضمن دوران خود طی می کند برابر است با:

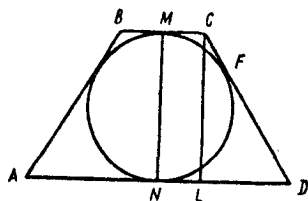
$$2\pi \cdot OC = 2\pi \sqrt{O_1O^2 - O_1C^2} = \\ = 2\pi \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 4\pi \sqrt{Rr}$$

و سطح مجهول حلقه، طبق قضیه اول گولدن چنین میشود:

$$S = 2\pi r \cdot 4\pi \sqrt{Rr} = 8\pi^2 r \sqrt{Rr}$$

و حجم آن، طبق قضیه دوم گولدن:

$$V = \pi r^2 \cdot 4\pi \sqrt{Rr} = 4\pi^2 r^2 \sqrt{Rr}$$



شکل ۵۴

$$\text{که در آنها } R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} \text{ است.}$$

۸۷۲. سطح کره:

$$(2R)^2 \pi = S; \quad 2R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

سطح جانبی مخروط ناقص (شکل ۵۴):

$$S_1 = \pi(ND + MC) \cdot CD = \pi(DF + FC) \cdot CD = \pi \cdot CD^2$$

$$CD^2 = (2R)^2 - LD^2 = (2R)^2 - \frac{CD^2}{4} \quad \text{ولی :}$$

$$CD^2 = \frac{4}{3}(2R)^2 = \frac{4S}{3\pi} \quad \text{واز آنجا :}$$

$$S_1 = \frac{4}{3}S \quad \text{وبنا براین :}$$

۸۷۴. شعاع کره را R و ضلع مکعب را a و وزن مخصوص آهن و مس را به ترتیب P_1 و P_2 می گیریم ، داریم :

$$\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{Q}{P_1 + P_2} ;$$

از آنجا شعاع کره و وزن جسم به ترتیب چنین اند :

$$R = \sqrt[3]{\frac{3Q}{2\pi(P_1 + P_2)}} ; \quad Q = \frac{2}{3}\pi R^3 (P_1 + P_2).$$

ضلع و حجم مکعب :

$$a = \frac{2R}{\sqrt[3]{3}} ; \quad a^3 = \frac{4\sqrt[3]{3}Q}{3\pi(P_1 + P_2)}$$

حجم مکعب و حجم براده های تراشیده شده :

$$P = \frac{a^3}{2} (P_1 + P_2) = \frac{2\sqrt[3]{3}Q}{3\pi} ; \quad Q - P = \frac{Q(3\pi - 2\sqrt[3]{3})}{3\pi}$$

$$r = R \sqrt{\frac{1 - 2d}{2(d_1 - d)}} \quad \text{۸۷۵. جواب :}$$

۳. مثلثات

§ ۱۵. تبدیلات اتحادی در عبارتهای مثلثاتی

۸۷۶. جواب : $0,029$

۸۷۷. جواب : $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۸۷۹. داریم :

$$\cot^2 \alpha + \tan^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7 ;$$

$$\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha + 1 = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha ;$$

یا :

$$(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 + 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha ;$$

$$2 = \frac{9}{4} \sin^2 2\alpha \Rightarrow \sin^2 2\alpha = \frac{8}{9}$$

۸۸۰. باحل معادله درجه دوم مفروض بدست می آید :

$$\tan \alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

که در آن $|a| \geq 2$ است و با توجه باینکه $a > 0$ است باید $a \geq 2$ باشد.

برای $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ خواهیم داشت :

$$\tan \alpha = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \quad (1)$$

و در نتیجه خواهیم داشت :

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 - a \operatorname{tg} \alpha}{a \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{a \operatorname{tg} \alpha} - 1$$

که اگر بجای $\operatorname{tg} \alpha$ از رابطه (۱) قرار دهیم بدست می آید :

$$\cos^2 \alpha = \frac{4}{a(a - \sqrt{a^2 - 4})} - 1 = \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a}$$

۸۸۱. داریم :

$$\frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha (3 \operatorname{tg} \alpha + 1)}{\cos \alpha (1 - 3 \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{-21 + 1}{1 + 21} = -\frac{10}{11}$$

۸۸۲. از رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ نتیجه می شود :

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

از طرف دیگر داریم :

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = a^2 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}$$

و بنابراین :

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{a^2 - 1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} (2a^2 - a^4 + 1)$$

۸۸۳. اگر حاصل عبارت را A بگیریم ، داریم :

$$\begin{aligned} A &= \cos^2(\alpha + \beta) [a \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) + b \operatorname{tg}(\alpha + \beta) + c] = \\ &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} [a \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) + b \operatorname{tg}(\alpha + \beta) + c] = c \end{aligned}$$

زیرا طبق روابط ویت داریم :

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = -\frac{b}{a} ; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{c}{a} ;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{b}{c - a}$$

جواب : c

۸۸۴. داریم :

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} ; \sin(\alpha + \beta) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} \quad (۱)$$

از طرف دیگر بنا بر فرض مسئله داریم :

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{a}{b} \quad (۲)$$

و اگر مقدار $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ را از رابطه (۱) در رابطه (۲) قرار دهیم ، روابط

حکم بدست می آید .

۸۸۵. اگر فرض کنیم :

$$a = \operatorname{tg} \alpha ; b = \operatorname{tg} \beta ; c = \operatorname{tg} \gamma$$

خواهیم داشت :

$$\frac{a - b}{1 + ab} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

و به همین ترتیب :

$$\frac{b - c}{1 + bc} = \operatorname{tg}(\beta - \gamma) ; \frac{c - a}{1 + ac} = \operatorname{tg}(\gamma - \alpha).$$

و بنا بر این مجموع مفروض بصورت زیر در می آید :

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha)$$

و میدانیم که اگر مجموع سه قوس برابر صفر باشد (همانطور که در اینجا هست) ، مجموع تانژانتهای آنها برابر با حاصلضرب تانژانتهای آنها خواهد بود

(مسئله ۹۴۸ را به بینید) .

۸۸۸. داریم :

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 4\alpha = \\
 &= \frac{1}{4} \sin 4\alpha - \frac{1}{4} \sin 6\alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha
 \end{aligned}$$

و تساوی اخیر غیرممکن است زیرا داریم :

$$\left| \frac{1}{4} \sin 4\alpha - \frac{1}{4} \sin 6\alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right| \leq \frac{1}{4} \left\{ |\sin 4\alpha| + |\sin 6\alpha| + |\sin 2\alpha| \right\} \leq \frac{3}{4}$$

۸۸۹. از نامساوی $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ نتیجه میشود :

$$\alpha > \sin \alpha \implies \alpha \sin \alpha < \sin^2 \alpha$$

همچنین بسادگی ثابت میشود که :

$$\cos \alpha > \cos^2 \alpha$$

که از جمع این دو نامساوی بدست می آید :

$$\cos \alpha + \alpha \sin \alpha > 1$$

۸۹۰. داریم :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \\
 &= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1(1 + \cos^2 2\alpha)}{\sin^2 2\alpha} \geq \frac{1}{\sin^2 2\alpha} \geq 1
 \end{aligned}$$

۸۹۱. بترتیب داریم :

$$\left(\sin \frac{\pi}{16} \right)^2 + \left(\sin \frac{3\pi}{16} \right)^2 + \left(\sin \frac{5\pi}{16} \right)^2 + \left(\sin \frac{7\pi}{16} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \cos \frac{\pi}{8} \right)^2 + \left(1 - \cos \frac{3\pi}{8} \right)^2 + \left(1 - \cos \frac{5\pi}{8} \right)^2 + \left(1 - \cos \frac{7\pi}{8} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[4 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{8} \right) + \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \right. \right.$$

$$\left. + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} \right) \right] = \frac{1}{4} \left[\left(4 - 2 \left(2 \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{8} + \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \left(4 + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4} \right) = \frac{1}{4} [4 - 2 \times 0 + \\
 & + \frac{1}{2} (4 + 2 \cos \pi \cos \frac{3\pi}{4} + 2 \cos \pi \cos \frac{\pi}{4})] = \frac{1}{4} [4 + 2 + \cos \pi (\cos \frac{3\pi}{4} + \\
 & + \cos \frac{\pi}{4})] = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

۸۹۲. جواب : $\frac{3}{2}$

۸۹۳. جواب : ۱

۸۹۴. جواب : $\cos^2 \alpha$

۸۹۵. داریم :

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \\
 & = \sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = \\
 & = -(\sin \alpha + \cos \alpha)
 \end{aligned}$$

زیرا در ربع سوم سینوس و کسینوس مقادیری منفی هستند .

۸۹۶. جواب : $-\cos^2 \alpha$

۸۹۷. جواب : $2 \operatorname{tg} \alpha$

۸۹۸. داریم :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{cotg}^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 - \operatorname{cotg}^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\
 & = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 = 3 - \operatorname{tg}^2 \alpha
 \end{aligned}$$

۸۹۹. داریم :

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1 + \cos 2\alpha) + (\cos 3\alpha + \cos \alpha)}{(1 + \cos 2\alpha) + \cos \alpha - 1} = \frac{2 \cos^2 \alpha + 2 \cos 2\alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha + \cos \alpha} = \\
 & = \frac{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \cos 2\alpha)}{\cos \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \cos \alpha
 \end{aligned}$$

۹۰۰. داریم :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \sec^2 \beta = \sec^2 \alpha - 1 + 1 + \operatorname{tg}^2 \beta = \operatorname{tg}^2 \beta + \sec^2 \alpha$$

۹۰۳. داریم :

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cos \gamma \alpha &= 1 + \frac{2 \cos \gamma \alpha \sin \gamma \alpha}{\sin \gamma \alpha} = \frac{\sin \gamma \alpha + \sin 1 \gamma \alpha}{\sin \gamma \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\gamma \alpha}{2} \cos \frac{\gamma \alpha}{2}}{2 \sin \frac{\gamma \alpha}{2} \cos \frac{\gamma \alpha}{2}} = \frac{\sin 10 / \Delta \alpha}{\sin 3 / \Delta \alpha} \end{aligned}$$

۹۰۴. بترتیب داریم :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right)} &\times \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)} = \\ &= \frac{\cos \alpha \sin \alpha (1 - \sin \alpha \cos \alpha)}{\cos \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)} \times \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)} = \sin \alpha \end{aligned}$$

۹۰۵. داریم :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} &= \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta)(\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= - \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \end{aligned}$$

۹۰۶

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \frac{1 - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{1 + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$$

۹۰۷. داریم :

$$\frac{3(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}) + 10 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sec^2 \frac{\alpha}{2}} = 3 + 10 \times \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 3 + 5 \times 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 3 + 5 \sin \alpha$$

۹۰۸. راهنمایی: هریک از کسرهای را با باز کردن صورت به تانژانت تبدیل کنید.

۹۰۹. داریم:

$$\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) + \frac{\cos \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} = (1 + \operatorname{tg} \alpha) \left(\sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) =$$

$$= (1 + \operatorname{tg} \alpha) \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha$$

۹۱۰. بترتیب داریم:

$$\frac{\sin \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) + 1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \sec^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha.$$

۹۱۱. با استفاده از رابطه واضح $2 \sin^2 (45^\circ - \alpha) = 1 - \sin 2\alpha$ داریم:

$$\frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\operatorname{cotg} \alpha - 1}{\operatorname{cotg} \alpha + 1} =$$

$$= \operatorname{cotg} (45^\circ + \alpha)$$

۹۱۲. با باز کردن پراوتز صورت، بدست می آید:

$$\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} -$$

$$- \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\frac{\sqrt{2} \sin \alpha - \sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{2} \sin \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad .913$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)}}{\sin 2\alpha} \quad .914$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} = 2 \operatorname{cosec} 2\alpha \quad .915$$

$$\frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) \quad .916$$

$$\frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sec \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \quad .918$$

۹۱۹. بترتیب داریم :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sin 4\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} &= \frac{2}{2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \\ &= \frac{1 - \cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha \end{aligned}$$

$$\frac{2 \cot \alpha}{\operatorname{cosec} 2\alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \quad .920$$

۹۲۱. داریم :

$$\frac{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = 1 + \cos \alpha$$

۹۲۲

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

۹۲۳. بترتیب داریم :

$$\begin{aligned} \frac{tg \alpha + 1}{tg \alpha - 1} - \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{tg^2 \alpha - 1} &= \frac{(tg \alpha + 1)^2 - tg^2 \alpha - 2}{tg^2 \alpha - 1} = \\ &= \frac{2(tg \alpha - 1)}{tg^2 \alpha - 1} = \frac{2}{tg \alpha + 1} \end{aligned}$$

۹۲۴

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha$$

۹۲۵

$$\frac{\sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)}{\cos^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right)} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = tg^2 \alpha$$

۹۲۸. داریم :

$$\begin{aligned} &2[(\sin^2 \alpha)^2 + (\cos^2 \alpha)^2] - 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 1 = \\ &= 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &+ 1 = -(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) + 1 = 1 - \\ &\quad - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 0 \end{aligned}$$

۹۲۹

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} - \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \left[1 - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \right] = \\ &= tg(\alpha + \beta) \times \frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = tg(\alpha + \beta) tg \alpha tg \beta \end{aligned}$$

۹۳۰. داریم :

$$\begin{aligned} 4\cos^2\alpha &= 2(2\cos^2\alpha) = 2(1 + \cos 2\alpha) = 2 + 2\cos 2\alpha + \\ &+ 2\cos^2\alpha = 2 + 2\cos 2\alpha + 1 + \cos 2\alpha = 3 + 2\cos 2\alpha + \cos 2\alpha \\ &: ۹۳۱. \text{ با تبدیل } 2\cos^2\alpha \text{ به } 1 + \cos 2\alpha \text{ خواهیم داشت:} \end{aligned}$$

$$1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha - 1 = \cos 2\alpha + \cos \alpha = 2\cos \frac{2\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin 2\alpha + \cos \alpha - \cos 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha + 2\sin \alpha \sin \alpha = \quad . ۹۳۲$$

$$= 2\sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha) = 2\sin \alpha \left[\cos \alpha - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right] =$$

$$= 2\sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$2\left(\frac{1}{2} - \tan^2 \alpha\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \tan \alpha\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \tan \alpha\right) = \quad . ۹۳۳$$

$$= 2(\tan 30^\circ + \tan \alpha)(\tan 30^\circ - \tan \alpha) = \frac{2\sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha)}{\cos^2 30^\circ \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2\sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2}\cos^2 \alpha} = 4\sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha)\sec^2 \alpha$$

۹۳۴. بترتیب داریم :

$$\begin{aligned} \frac{2\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} + \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha} &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{(1 + \cos 2\alpha)\cos 2\alpha} = \\ &= \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2\cos \alpha} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2\cos(\alpha - \beta)\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \quad . ۹۳۵$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta) - 2\cos(\alpha - \beta)\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} =$$

$$= \frac{1 - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta)\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} =$$

$$= \frac{1 - \cos(\alpha - \beta)[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

۹۳۶. اگر بین کسره‌های سمت چپ تساوی مخرج مشترك بگیریم بدست می‌آید:

برای صورت کسر :

$$\sin(\beta - \gamma) - (\alpha - \gamma) - \sin(\beta - \alpha) =$$

$$= 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha - 2\gamma}{2} - 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} =$$

$$= 4 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \sin \frac{\gamma - \alpha}{2}$$

و برای مخرج کسر :

$$\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma) \sin(\beta - \gamma) =$$

$$= 8 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} \times \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$$

و نتیجه بسادگی بدست می‌آید .

$$(1 + \cos 2\alpha) + (\cos 4\alpha + \cos 6\alpha) = 2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \Delta \alpha \cos \alpha = .937$$

$$= 2 \cos \alpha (\cos \alpha + \cos \Delta \alpha) = 4 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$$

$$(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha) - \sin 2(3\alpha) = .938$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - 2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha = 2 \sin 3\alpha (\cos \alpha - \cos 3\alpha) =$$

$$= 2 \sin 3\alpha \cdot 2 \sin 2\alpha \sin \alpha = 4 \sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha$$

$$\frac{(\sin \alpha + \sin \Delta \alpha) + 2 \sin 3\alpha}{(\sin 3\alpha + \sin \gamma \alpha) + 2 \sin \Delta \alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + 2 \sin 3\alpha}{2 \sin \Delta \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \Delta \alpha} = .939$$

$$= \frac{2 \sin 3\alpha (\cos 2\alpha + 1)}{2 \sin \Delta \alpha (\cos 2\alpha + 1)} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \Delta \alpha}$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1 + \cos(\alpha + \beta)}{2} - .940$$

$$-\frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{2} = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] = \cos\alpha\cos\beta$$

$$1 + \frac{1}{\frac{\sin\alpha + 1}{\sin\alpha}} = 1 + \frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{1 + 2\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = \quad .۹۴۱$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2} + \sin\alpha\right)}{1 + \sin\alpha} = \frac{2(\sin 30^\circ + \sin\alpha)}{\sin 90^\circ + \sin\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$(\sin\alpha + \sin\beta) - [\sin(\alpha + \beta + \gamma) - \sin\gamma] = \quad .۹۴۲$$

$$= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - \cos\frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \gamma}{2}\sin\frac{\beta + \gamma}{2}$$

۹۴۳. این اتحاد را از راه تبدیل آن بیک اتحاد جبری اثبات می‌کنیم. اگر

فرض کنیم $tg\alpha = a$ خواهیم داشت $\cotg\alpha = \frac{1}{a}$ و در اینصورت داریم:

$$۱) \frac{a^2}{1 + a^2} \times \frac{1 + \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}} = \frac{a^2(a^2 + 1)}{1 + a^2} = a^2$$

$$۲) \frac{1 + a^4}{a^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{a^2(1 + a^4)}{a^4 + 1} = a^2$$

وباین ترتیب دوطرف تساوی بیک نتیجه منجر می‌شود و اتحاد صحیح است.

۹۴۴. داریم :

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \sin 2(\alpha + \beta)}{2} + \cos^2 \beta = \\ &= \frac{\cos 2\beta + \sin 2(\alpha + \beta)}{2} + \cos^2 \beta = \cos(2\alpha + \beta) \cos \beta + \cos^2 \beta = \\ &= \cos \beta [\cos(2\alpha + \beta) + \cos \beta] = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

۹۴۵. داریم :

$$\begin{aligned} & \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \sin \beta \cos \beta = \\ &= (\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) + (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) + \\ & \quad + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \sin \beta \cos \beta - \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \alpha \cdot \cos \alpha \sin \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 = \sin^2(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

۹۴۶. صحت این اتحاد را باروش استقراء ریاضی ثابت می کنیم :

بازاء $n = 2$ اتحاد واضح است .

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 2$$

علاوه بر آن داریم :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}[(n+1)\alpha - n\alpha] = \frac{\operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} n\alpha}{1 + \operatorname{tg}(n+1)\alpha \operatorname{tg} n\alpha} ;$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$\operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg}(n+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 1$$

و بنابراین می توان نوشت :

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \dots + \operatorname{tg}(n-1)\alpha \operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg}(n+1)\alpha = \\ &= \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - n + \frac{\operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 = \\ &= \frac{\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - (n+1) = \frac{\operatorname{tg}(n+1)\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - (n+1). \end{aligned}$$

یعنی اگر اتحاد بازاء n صحیح باشد برای $n+1$ هم صحیح است و بنابراین برای همه مقادیر n صحیح است.

۹۴۷. داریم :

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \cos \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta - \sin[(\alpha + \beta) + \gamma]}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} =$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta - \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma - \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} =$$

$$= \frac{(\cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

۹۴۸. اولاً داریم :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg} \gamma \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg} \gamma$$

و از آنجا بدست می آید :

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

ثانیاً هم به همین ترتیب ثابت می شود.

۹۴۹. داریم :

$$\frac{\sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$$

$$= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

۹۵۰. داریم :

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) = \cos \frac{\gamma}{2} ;$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} & 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = 2 \cos \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right) = \\ & = 2 \cos \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

۹۵۱. شبیه تمرین ۹۴۸ حل میشود .

۹۵۳. داریم :

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \frac{1 - \cos \beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 1 = \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} (\cos \alpha + \cos \beta) = \\ & = \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \frac{\gamma}{2} \left(\sin \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ & = \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = -2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} ; \end{aligned}$$

۹۶۲. میدانیم که اگر داشته باشیم $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می توان نوشت : $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$

بنابراین فرض مسئله را می توان چنین نوشت :

$$\frac{n + \cos \beta}{n + \cos \alpha} = \frac{-1 - n \cos \beta}{1 + n \cos \alpha}$$

اگر در این تناسب بازهم از همان خاصیت بالا استفاده کنیم ، پس از عملیات ساده بدست می آید :

$$\frac{(1-n)(1-\cos \beta)}{(1+n)(1+\cos \alpha)} = \frac{(1+n)(1+\cos \beta)}{(1-n)(1-\cos \alpha)}$$

$$\frac{1-\cos \beta}{1+\cos \beta} \times \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = \left(\frac{1+n}{1-n} \right)^2 \quad \text{و یا :}$$

یعنی :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{1+n}{1-n} \right)^2$$

و از آنجا :

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{1+n}{1-n}$$

§ ۱۶. تبدیل عبارتهای مثلثاتی بصورت لگاریتمی

۹۶۴. بترتیب می نویسیم :

$$(\sin 61^\circ - \sin 59^\circ) - (\sin 93^\circ - \sin 87^\circ) =$$

$$= 2 \sin 1^\circ \cos 60^\circ - 2 \sin 3^\circ \cos 90^\circ = 2 \times \frac{1}{2} \sin 1^\circ = \sin 1^\circ$$

$$(\sin 47^\circ + \sin 61^\circ) - (\sin 25^\circ + \sin 11^\circ) = \quad ۹۶۵$$

$$= 2 \cos 7^\circ \sin 54^\circ - 2 \cos 7^\circ \sin 18^\circ = 2 \cos 7^\circ (\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) =$$

$$= 4 \cos 7^\circ \cos 36^\circ \sin 18^\circ = 4 \cos 7^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ) \sin 18^\circ =$$

$$= 4 \cos 7^\circ \times \frac{\sqrt{5}+1}{4} \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 7^\circ$$

$$4 \cos 10^\circ \cos 7^\circ 30' \sin 52^\circ 30' \quad ۹۶۶. \text{ جواب :}$$

$$(\cos 11\alpha + \cos 5\alpha) + 3(\cos 9\alpha + \cos 7\alpha) = \quad ۹۶۷$$

$$= 2 \cos 8\alpha \cos 3\alpha + 6 \cos 8\alpha \cos \alpha = 2 \cos 8\alpha (\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha) =$$

$$= 2 \cos 8\alpha (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 3 \cos \alpha) = 8 \cos 8\alpha \cos^3 \alpha$$

۹۶۸. بترتیب داریم :

$$1 + \cos \alpha - \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right] =$$

$$= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sin 45^\circ \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos \alpha \cos (45^\circ - \alpha) \\ \sqrt{2} \cos \alpha \sin (45^\circ + \alpha) \end{cases} \quad ۹۶۹. \text{ جواب :}$$

۹۷۰. بترتیب می نویسیم :

$$(\sin \alpha + \sin \beta) + \sin(\alpha + \beta) =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \times 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} =$$

$$= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{4} + 30^\circ \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{4} - 30^\circ \right) : \text{جواب : ۹۷۱}$$

$$4 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \sec^2 x : \text{جواب : ۹۷۲}$$

۹۷۳. صورت و مخرج کسر را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، می‌شود :

$$\frac{\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha} = \frac{\cos 60^\circ \cos \alpha + \sin 60^\circ \sin \alpha}{\cos 60^\circ \cos \alpha - \sin 60^\circ \sin \alpha} = \frac{\cos(60^\circ - \alpha)}{\cos(60^\circ + \alpha)}$$

۹۷۴. داریم :

$$(\cotg^2 x - \tg^2 x)(\cotg^2 x + \tg^2 x) - \lambda \cos^2 x \cotg^2 x =$$

$$= \frac{1 - \tg^2 x}{\tg x} \cdot \frac{1 + \tg^2 x}{\tg x} - \frac{\lambda \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \tg x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x \tg x} - \frac{\lambda \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sec^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\lambda \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sec^2 x}{\sin^2 x} (1 - \sin^2 x) = \dots$$

جواب : $\lambda \cotg^2 x \operatorname{cosec}^2 x \sin^2(45^\circ - x)$

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha)}{\sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha)} = \cotg(45^\circ - \alpha) . ۹۷۵$$

$$\frac{\sec \alpha (1 + \sin \alpha)}{\sec \alpha (1 - \sin \alpha)} = \frac{2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} = \cot^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \quad ۹۷۶$$

۹۷۷. اگر فرض کنیم $\beta = \arccos \frac{r}{\Delta}$ داریم :

$$\frac{\frac{r}{\Delta} + \cos \alpha}{\frac{r}{\Delta} - \cos \alpha} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = \cot \frac{\alpha + \beta}{2} \cot \frac{\alpha - \beta}{2}$$

۹۷۸. جواب : $2 \sin 50^\circ \cos 10^\circ$

$$2 + \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha + 1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = 2 + \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha \sin 2\alpha} = \quad ۹۷۹$$

$$= 2 \times \frac{1 + \sin 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{2 \cos^2 (45^\circ - 2\alpha)}{\sin 4\alpha}$$

$$(\sin \alpha + \sin 3\alpha) + \sin 2\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \quad ۹۸۰$$

$$= 2 \cos \alpha (\sin 2\alpha + \sin \alpha) = 4 \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}$$

۹۸۱. شبیه تمرین قبل حل می شود .

$$\frac{\cos \frac{3\alpha}{2} \cos 2\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} : \text{جواب}$$

$$2 \sin 2\alpha \sin \left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right) : \text{جواب} \quad ۹۸۲$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} : \text{جواب} \quad ۹۸۳$$

$$2\sqrt{2} \cos (45^\circ - 2\alpha) \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) : \text{جواب} \quad ۹۸۴$$

۹۸۵. از رابطه زیر استفاده می کنیم :

$$\sin m\alpha \cdot \sin k\alpha = \frac{1}{2} [\cos(m-k)\alpha - \cos(m+k)\alpha]$$

اگر در این رابطه فرض کنیم $k = \frac{1}{2}$ و m بترتیب از عدد يك تا n :

$$m = 1, 2, 3, \dots, (n-1), n$$

خواهیم داشت :

$$+ \left\{ \begin{array}{l} 2 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} ; \\ 2 \sin 2\alpha \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{5\alpha}{2} ; \\ 2 \sin 3\alpha \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{5\alpha}{2} - \cos \frac{7\alpha}{2} ; \\ \dots \dots \dots \\ 2 \sin (n-1)\alpha \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{(n-1)\alpha}{2} - \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \\ 2 \sin n\alpha \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} - \cos \frac{(n+2)\alpha}{2} \end{array} \right.$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} (\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha) =$$

$$= \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}$$

و از آنجا :

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{جواب :}$$

۹۸۶. راهنمایی : از رابطه زیر استفاده کنید :

$$\sin k a \cos m a = \frac{1}{2} [\sin(m+k)a - \sin(m-k)a]$$

$k = \frac{1}{2}$ و n و $m = 1, 2, \dots, (n-1)$ بگیرید و شبیه تمرین قبل عمل کنید .

جواب :

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

۹۸۷. داریم :

$$+ \begin{cases} 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \\ 2 \cos^2 2\alpha = 1 + \cos 4\alpha \\ \dots \dots \dots \\ 2 \cos^2 n\alpha = 1 + \cos 2n\alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2(\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \dots + \cos^2 n\alpha) &= \\ &= n + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \dots + \cos 2n\alpha) \end{aligned}$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \dots + \cos^2 n\alpha = \frac{n}{2} + \frac{\sin n\alpha \cos(n+1)\alpha}{2 \sin \alpha}$$

(برای نوشتن جواب از حل مسئله ۹۸۶ استفاده کردیم) .

۹۸۸. حل مانند مسئله قبل است . از رابطه زیر استفاده کنید :

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\text{جواب : } \frac{n}{2} - \frac{\sin n\alpha \cos(n+1)\alpha}{2 \sin \alpha}$$

۹۸۹. داریم :

$$+ \left\{ \begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{r} \cos \varphi &= \frac{1}{r} \left[\sin \left(\varphi + \frac{\alpha}{r} \right) - \sin \left(\varphi - \frac{\alpha}{r} \right) \right] \\ \sin \frac{\alpha}{r} \cos (\varphi + \alpha) &= \frac{1}{r} \left[\sin \left(\varphi + \frac{r\alpha}{r} \right) - \sin \left(\varphi + \frac{\alpha}{r} \right) \right] \\ &\dots \dots \dots \\ \sin \frac{\alpha}{r} \cos (\varphi + n\alpha) &= \frac{1}{r} \left[\sin \left(\varphi + \frac{rn + 1}{r} \alpha \right) - \sin \left(\varphi + \frac{rn - 1}{r} \alpha \right) \right] \end{aligned} \right.$$

$$\sin \frac{\alpha}{r} \sum_{k=0}^n \cos (\varphi + k\alpha) = \frac{1}{r} \left[\sin \left(\varphi + \frac{rn + 1}{r} \alpha \right) - \sin \left(\varphi - \frac{\alpha}{r} \right) \right]$$

$$\sum_{k=0}^n \cos (\varphi + k\alpha) = \frac{\sin \frac{n+1}{r} \alpha \cos \left(\varphi + \frac{n\alpha}{r} \right)}{\sin \frac{\alpha}{r}} \quad \text{وازا آنجا :}$$

$$\cotg r\alpha \frac{\cotg^r \alpha - 1}{r \cotg \alpha} = \frac{1}{r} (\cotg \alpha - \tg \alpha) \quad ۹۹۱. \text{ داریم :}$$

$$r \cotg r\alpha = \cotg \alpha - \tg \alpha \quad \text{یعنی :}$$

تساویهای زیر را می نویسیم و پس از ضرب طرفین هریک از آنها در عددی که مقابلش قرار دارد ، آنها را با هم جمع می کنیم :

$$+ \left\{ \begin{array}{l|l} \tg \alpha = \cotg \alpha - r \cotg r\alpha & 1 \\ \tg \frac{\alpha}{r} = \cotg \frac{\alpha}{r} - r \cotg \alpha & \frac{1}{r} \\ \tg \frac{\alpha}{r^2} = \cotg \frac{\alpha}{r^2} - r \cotg \frac{\alpha}{r} & \frac{1}{r^2} \\ \dots \dots \dots & \vdots \\ \tg \frac{\alpha}{r^{n-1}} = \cotg \frac{\alpha}{r^{n-1}} - r \cotg \frac{\alpha}{r^{n-2}} & \frac{1}{r^{n-1}} \end{array} \right.$$

$$\tg \alpha + \frac{1}{r} \tg \frac{\alpha}{r} + \dots + \frac{1}{r^{n-1}} \tg \frac{\alpha}{r^{n-1}} = \frac{1}{r^{n-1}} \cotg \frac{\alpha}{r^{n-1}} - r \cotg r\alpha$$

$$\sin m\alpha \cdot \sin k\alpha = \frac{1}{2} [\cos(m-k)\alpha - \cos(m+k)\alpha]$$

k را مساوی ۱ و m را از ۱ تا $n-1$ می‌گیریم ، در اینصورت داریم :

$$+ \left\{ \begin{aligned} \sin \alpha \sin \alpha &= \frac{1}{r} (\cos 0 - \cos r \alpha) \\ \sin r \alpha \sin \alpha &= \frac{1}{r} (\cos r \alpha - \cos r^2 \alpha) \\ \sin \Delta \alpha \sin \alpha &= \frac{1}{r} (\cos r^2 \alpha - \cos r^3 \alpha) \\ &\dots\dots\dots \\ \sin(rn-1)\alpha \cdot \sin \alpha &= \frac{1}{r} [\cos(rn-1)\alpha - \cos rn \alpha] \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha [\sin \alpha + \sin \varphi \alpha + \dots + \sin (\varphi n - 1) \alpha] = \\ = \frac{1}{\varphi} (1 - \cos (\varphi n \alpha)) = (\sin n \alpha) \varphi \end{aligned}$$

که اگر طرفین تساوی بدست آمده را بر $\sin^2 \alpha$ تقسیم کنیم ، تساوی مورد نظر بدست می آید .

۹۹۳. از تساویهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\cos \alpha = \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \sin \alpha}$$

$$\cos \gamma \alpha = \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \sin \gamma \alpha}$$

$$\cos \varphi \alpha = \frac{\sin \lambda \alpha}{\gamma \sin \varphi \alpha}$$

$$\cos \gamma^k \alpha = \frac{\sin \gamma^{k+1} \alpha}{\gamma \sin \gamma^k \alpha}$$

از ضرب این روابط در یکدیگر تساوی مطلوب بدست می آید .

§ ۱۷. توابع معکوس مثلثاتی

$$\cos \left[\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \cos \left(-\arcsin \frac{1}{2} \right) = \quad .994$$

$$= \cos \left(\arcsin \frac{1}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

.995 اگر فرض کنیم $\arccos \frac{3}{5} = x$ داریم:

$$\cos x = \frac{3}{5}; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

و بنابراین :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

.996 جواب : $\frac{77}{85}$

.997 جواب : $\frac{12}{5}$

.999 جواب : $\frac{\pi}{2}$

۱۰۰۰ جواب : صفر

۱۰۰۳ فرض می کنیم : $\arctg \frac{1}{5} = x$, $\arctg \frac{1}{4} = y$, در این صورت :

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}; \quad 0 < x < \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{4}; \quad 0 < y < \frac{\pi}{6}$$

باین ترتیب تساوی مفروض بصورت زیر می آید :

$$2x + y = \operatorname{arctg} \frac{32}{43}$$

$$\operatorname{tg}(2x + y) = \frac{32}{43} \quad \text{و یا :}$$

که باتوجه باینکه $\operatorname{tg} 2x = \frac{5}{12}$ و $0 < 2x + y < \frac{\pi}{2}$ است . صحت تساوی مسلم است .

۱۰۰۴ . فرض می کنیم :

$$\arccos a = x \Rightarrow \cos x = a$$

و چون $a \geq 0$ است $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ خواهد بود .

رابطه فرض بصورت زیر درمی آید :

$$2x = \arccos(2a^2 - 1) \quad (1)$$

ولی داریم : $0 < 2x \leq \pi$; $\cos 2x = 2a^2 - 1$; بنابراین رابطه (۱) و در نتیجه رابطه فرض صحیح است .

$$x = \frac{1 - \operatorname{tg}\left(\lambda \operatorname{arctg} \frac{1}{10}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\lambda \operatorname{arctg} \frac{1}{10}\right)} \quad \text{۱۰۰۹ . راهنمایی :}$$

۱۰۱۰ . داریم :

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta) = \operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg} \gamma) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \gamma)$$

یعنی :

$$\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} = -\gamma \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

§ ۱۸ . معادلات مثلثاتی

۱۰۱۲ . داریم :

$$3 \sin x = 2(1 - \sin^2 x) \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

واز آنجا :

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

$$(\sin x = -\frac{1}{2})$$

$$x = (2k+1)\pi : \text{جواب : } ۱۰۱۳$$

$$: ۱۰۱۴ \text{ داریم}$$

$$\sin x + (1 - \sin^2 x) = \frac{1}{4} \Rightarrow 4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$$

از آنجا :

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

$$\left(\sin x = \frac{3}{4} \right)$$

۱۰۱۵. شرط لازم و کافی برای وجود تساوی $\sin x = \sin y$ اینست که یکی از دو تساوی زیر برقرار باشد :

$$x - y = 2k\pi ; x + y = (2k+1)\pi$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$6x - 4x = 2k\pi$$

$$6x + 4x = (2k+1)\pi$$

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{10} , x = k\pi : \text{جواب :}$$

۱۰۱۶. شرط لازم و کافی برای تساوی $\cos x = \cos y$ وجود یکی از تساویهای زیر است :

$$x - y = 2k\pi ; x + y = 2k\pi$$

بنابراین در مورد معادله مفروض داریم :

$$3x - x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

$$3x + x = 2k\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2}$$

جواب : $x = k\frac{\pi}{2}$

۱۰۱۷. شرط لازم و کافی برای تساوی $tg x = tg y$ یا $cotg x = cotg y$ عبارتست از $x - y = k\pi$. بنابراین داریم :

$$2x - x = k\pi$$

جواب : $x = k\pi$

۱۰۱۸. داریم : $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$3x + \frac{\pi}{2} - 2x = (2k+1)\pi$$

$$3x - \frac{\pi}{2} + 2x = 2k\pi$$

جواب . $x = (2k+1)\frac{\pi}{10}$ ، $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

۱۰۱۹. جواب : $x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$ ، $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۰۲۰. جواب : $x = -(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ، $x = (2k+1)\frac{\pi}{10}$

۱۰۲۱. جواب : $x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$

۱۰۲۲. داریم :

$$tg 2x = tg\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{2} + 3x = k\pi$$

جواب : $x = (2k+1)\frac{\pi}{10}$

۱۰۲۳. پس از تبدیل به صورت ضرب بدست می آید :

$$\sin x (\Delta - \sin^2 x) = 0 ;$$

و چون $\Delta - \sin^2 x \neq 0$ است داریم :

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

۱۰۲۴. تبدیلات زیر را انجام می دهیم :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right)\right] = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) = \\ = \sin 3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

که پس از قراردادن در معادله مفروض خواهیم داشت :

$$\sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} : \text{ جواب}$$

۱۰۲۵. اگر $\operatorname{tg} nx = 0$ باشد ، معادله مفروض جواب ندارد . با فرض

$$\operatorname{tg} nx \neq 0 \text{ بدست می آید :}$$

$$\operatorname{tg} mx = \operatorname{cotg} nx \Rightarrow \operatorname{tg} mx = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - nx\right)$$

$$x = \frac{2k+1}{m+n} \cdot \frac{\pi}{2} : \text{ جواب}$$

۱۰۲۶. اگر طرفین تساوی را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم ، بدست می آید :

$$\frac{1}{2} \cos \gamma x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \Delta x + \frac{1}{2} \sin \Delta x ;$$

$$\sin \frac{\pi}{6} \cos \gamma x + \cos \frac{\pi}{6} \sin \gamma x = \sin \frac{\pi}{3} \cos \Delta x + \cos \frac{\pi}{3} \sin \Delta x ;$$

$$\sin\left(\gamma x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\Delta x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = (4k+1) \frac{\pi}{24} , x = (12k+1) \frac{\pi}{12} : \text{ جواب}$$

۱۰۲۷. معادله مفروض بسادگی چنین می شود :

$$\cos 2x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$x = (4k+1) \frac{\pi}{6} , x = (4k-1) \frac{\pi}{6} : \text{ جواب}$$

۱۰۲۸. بترتیب داریم :

$$\sin(8x + 60^\circ) = -\sin 2x \Rightarrow \sin(8x + 60^\circ) = \sin(-2x)$$

و از آنجا :

$$8x + 60^\circ - 2x = (2k + 1)180^\circ$$

$$8x + 60^\circ + 2x = 2k \cdot 180^\circ$$

جواب : $x = 36k^\circ - 6^\circ$ ، $x = 60k^\circ + 20^\circ$: داریم . ۱۰۲۹

$$4 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x - \frac{1}{4} = 0$$

و یا :

$$16 \sin^4 x - 12 \sin^2 x + 1 = 0$$

که با حل آن جوابهای x بدست می آید .

$$\left| \begin{array}{l} x = k\pi \pm \arcsin \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}} ; \\ x = k\pi \pm \arcsin \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} \end{array} \right. ; \quad \text{جواب :}$$

۱۰۳۰ . معادله را می توان بترتیب چنین نوشت :

$$\sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x ;$$

$$\sin^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin^2 x = 1$$

جواب : $x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12}$

۱۰۳۱ . داریم :

$$\sin^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow 4 \sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = 0 ;$$

$$\cos^2 x (4 \cos^2 x - 1) = 0 ;$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۱۰۳۲ . معادله مفروض را بصورت زیر می نویسیم :

$$\frac{1 - \cos^2 x}{2} + \frac{1 - \cos^4 x}{2} = \frac{1 - \cos^6 x}{2} ;$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 1 + \cos 6x ;$$

$$2 \cos 3x \cos x = 2 \cos^2 3x$$

و از آنجا:

$$a) \cos 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$b) \cos x - \cos 3x = 0 \Rightarrow 2 \sin 2x \sin x = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$x = k\frac{\pi}{2}, x = (2k+1)\frac{\pi}{6} : \text{جواب}$$

۱۰۳۳. داریم :

$$\sin 3x + \sin x = \cos x ;$$

$$2 \sin 2x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \sin 2x - 1) = 0$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12}, x = k\pi + \frac{\pi}{6} : \text{جواب}$$

۱۰۳۴. پس از عملیات ساده، می‌توان معادله را بصورت زیر نوشت :

$$\sin x \cdot \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0 ;$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi ;$$

$$\sin \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} ;$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 2k\pi .$$

$$x = \frac{2k\pi}{3}, x = k\pi : \text{جواب}$$

$$x = (2k \pm 1)\pi, x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, x = k\pi : \text{جواب} \quad ۱۰۳۵$$

۱۰۳۶. این معادله نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ متقارن است و بازاء هیچ مقداری

از x ، $\sin x$ و $\cos x$ با هم نمی‌توانند مساوی صفر شوند. فرض کنیم $\cos x \neq 0$ باشد، در این صورت می‌توان طرفین معادله را بر $\cos x$ تقسیم نمود، خواهیم داشت:

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

۱۰۳۷. با تبدیل به صورت ضرب خواهیم داشت:

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

و از آنجا:

$$\operatorname{tg}^2 x = 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

۱۰۳۸. داریم:

$$\frac{1}{2} \sin^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

از آنجا:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2};$$

$$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = (4k+1)\frac{\pi}{4}, \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \quad \text{جواب:}$$

۱۰۳۹. داریم:

$$3 \sin x = 4 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow 6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 4 \sin^2 \frac{x}{2} = 0;$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$3 \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} = 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$$

۱۰۴۰. با تجزیه سمت چپ تساوی بدست می آید :

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{2} ;$$

$$\cos^2 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

۱۰۴۱. سمت چپ معادله را بصورت مجذور کامل می نویسیم :

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^2 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^2 2x + 2\sin^2 x - 2 = 0$$

$$\sin^2 x = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow 2x = k\pi + (-1)^k \arcsin(\sqrt{2} - 1)$$

$$[\sin^2 x = -(1 + \sqrt{2})]$$

$$x = k\frac{\pi}{2} + (-1)^k \cdot \frac{\arcsin(\sqrt{2} - 1)}{2} : \text{جواب}$$

۱۰۴۲. معادله را می توان چنین نوشت :

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 ;$$

$$3\sin^4 x + 3\cos^4 x - 10\sin^2 x \cos^2 x = 0 ;$$

$$3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$$

که با حل این معادله دو مجذوری بدست می آید :

$$\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} ;$$

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۱۰۴۳. این معادله را می توان شبیه تمرین قبل حل کرد و یا بصورت زیر :

$$\left(\sin^2 \frac{x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3}\right)^2 - 2\sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{5}{8} ;$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{5}{8} \Rightarrow \sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \frac{2x}{3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2x}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

جواب : $x = (6k \pm 1) \frac{\pi}{4}$

۱۰۴۴. پس از عملیات مقدماتی خواهیم داشت :

$$\operatorname{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

۱۰۴۵. داریم :

$$8 \sin^2 x + 6 \cos^2 x - 26 \sin x \cos x = 0$$

$$4 \operatorname{tg}^2 x - 13 \operatorname{tg} x + 3 = 0 ;$$

$$\operatorname{tg} x = 3 \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg} 3$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$$

(بازاء این مقادیر x داریم : $\cos x \neq 0$)

۱۰۴۶. داریم :

$$2 \cos^2 x - 1 - 3 \cos x = 2(1 + \cos x) ;$$

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{4} (\cos x = 3)$$

جواب : $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۱۰۴۷. اگر مقدار ثابت را به سمت چپ منتقل کرده و عبارت را تجزیه کنیم،

چنین می شود :

$$4 \sin^2 x (\sin x + 1) - 3(\sin x + 1) = 0 ;$$

$$(\sin x + 1)(4 \sin^2 x - 3) = 0$$

جواب : $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ، $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۱۰۴۸. معادله مفروض را باین ترتیب تبدیل می کنیم :

$$\sin^2 x - 3 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

که پس از ساده کردن چنین می شود :

$$\sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{4} : \text{جواب}$$

۱۰۴۹. بترتیب داریم :

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0 ;$$

$$2 \sin 3x \cos x + \sin 5x = 0 \Rightarrow \sin 5x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad x = k\frac{\pi}{3} : \text{جواب}$$

۱۰۵۰. داریم :

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 1 + \cos 2x + \cos x ;$$

$$2 \sin 3x \cos x + \sin 5x = 2 \cos^2 x + \cos x ;$$

$$\sin 5x (2 \cos x + 1) = \cos x (2 \cos x + 1) ;$$

$$2 \sin x \cos x (2 \cos x + 1) - \cos x (2 \cos x + 1) = 0 ;$$

$$\cos x (2 \cos x + 1) (2 \sin x - 1) = 0 ;$$

و از آنجا :

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} ;$$

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

۱۰۵۱. بترتیب می‌توان نوشت :

$$(\sin x + \sin 3x) + (\sin 5x + \sin 7x) = 0 ;$$

$$2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 4x \cos 3x = 0 ;$$

$$\cos x (\sin 5x + \sin 7x) = 0$$

$$\cos x \cdot \sin \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0$$

یعنی :

و از آنجا :

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \frac{\Delta X}{\gamma} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta X}{\gamma} = k\pi$$

$$\cos \frac{X}{\gamma} = 0 \Rightarrow \frac{X}{\gamma} = k\pi$$

$$x = (2k+1)\pi, \quad x = \frac{2k\pi}{\gamma}, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{\gamma} : \text{جواب}$$

۱۰۵۲. داریم :

$$\sin^2 \gamma X = \sin^2 X + \sin X ;$$

$$\sin^2 \gamma X - \gamma \sin \gamma X \cos X = 0 ;$$

$$\gamma \sin \gamma X \cos X (\sin X - 1) = 0$$

$$\sin \gamma X = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\gamma} k\pi$$

$$\cos X = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{\gamma}$$

$$\sin x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{\gamma}$$

و بسادگی می توان متوجه شد که دو جواب آخر ضمن جواب اول بدست می آید .

$$\pi = k \cdot \frac{\pi}{\gamma} : \text{جواب}$$

۱۰۵۳. داریم :

$$\frac{\sin^2 X (\sin X + \cos X)}{\sin X} + \frac{\cos^2 X (\sin X + \cos X)}{\cos X} = \cos^2 X ;$$

$$(\sin X + \cos X)(\sin^2 X + \cos^2 X) = \cos^2 X - \sin^2 X ;$$

واز آنجا :

$$۱) \sin X + \cos X = 0 \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} ;$$

$$۲) \cos X - \sin X = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

جوابهای معادله اخیر در معادله اصلی صدق نمی کنند ، زیرا بازا این مقادیر x یا $\sin x$ و یا $\cos x$ بسمت صفر میل می کنند .

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4} : \text{جواب}$$

۱۰۵۴. راه حل اول. اگر فرض کنیم $tg \frac{x}{2} = z$ خواهیم داشت :

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} ; \sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

که اگر این مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ را در معادله قرار دهیم به اینصورت درمی آید :

$$(b+c)z^2 - 2az - (b-c) = 0 \quad (۱)$$

وازنجا :

$$z = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c}$$

۱°. اگر $a^2 + b^2 \geq c^2$ و $b+c \neq 0$ باشد ، معادله درجه دوم دارای ریشه های حقیقی است و جوابهای کلی آن بصورت زیر است :

$$x = 2k\pi + 2 \arctg \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c}$$

۲°. اگر $a^2 + b^2 < c^2$ باشد ، معادله (۱) دارای ریشه های موهومی خواهد بود و معادله مثلثاتی جواب ندارد .

۳°. اگر $b+c=0$ باشد ، معادله (۱) بصورت معادله خطی $z = -\frac{b}{a}$

درمی آید و معادله دارای ریشه های کلی زیر خواهد بود :

$$x = 2k\pi - 2 \arctg \frac{b}{a}$$

$$x = (2k+1)\pi$$

راه حل دوم . از زاویه کمکی استفاده می کنیم ، داریم :

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

اگر فرض کنیم $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ (φ را می‌توان از جدول بدست آورد) ،
خواهیم داشت :

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cdot \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos \varphi (\cos \varphi \neq 0)$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi \quad \text{یعنی :}$$

$$x + \varphi = k\pi + (-1)^k \arcsin\left(\frac{c}{a} \cos \varphi\right)$$

$$x = k\pi - \varphi + (-1)^k \arcsin\left(\frac{c}{a} \cos \varphi\right) \quad \text{جواب :}$$

بشرطی که $\left| \frac{c}{a} \cos \varphi \right| \leq 1$ باشد.

۱۰۵۵. بترتیب می‌توان نوشت :

$$\frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x = \frac{1}{2} ;$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x = \frac{1}{2} ;$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} , x = 2k\pi \quad \text{جواب :}$$

۱۰۵۶. اگر $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ فرض کنیم، معادله بصورت زیر درمی‌آید :

$$z^2 - z = 0 \Rightarrow z_1 = 0 ; z_2 = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 2k\pi ,$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۱۰۵۷. جواب : $x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg} \frac{3}{5}$, $x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg} \frac{4}{5}$

۱۰۵۸. جواب : $x = 2k\pi - 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۰۵۹. معادله مفروض را می توان به این صورت نوشت :

$$\sin x - \frac{3}{4} \cos x = \frac{1}{2} ;$$

$$\sin x - \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4} \right)$$

$$\cos \varphi \sin x - \sin \varphi \cos x = \frac{1}{2} \cos \varphi ;$$

$$\sin(x - \varphi) = \frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$x - \varphi = k\pi + (-1)^k \arcsin \left(\frac{\cos \varphi}{2} \right)$$

و با توجه باینکه $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$ است ، خواهیم داشت :

$$\cos \varphi = \frac{4}{5} ; \varphi = \arccos \frac{4}{5}$$

جواب : $x = k\pi + \arccos \frac{4}{5} + (-1)^k \arcsin \frac{3}{5}$

۱۰۶۰. فرض کنیم : $\sin x + \cos x = z$

در این صورت معادله مفروض چنین می شود :

$$5z^2 - 12z + 7 = 0 \Rightarrow z_1 = 1 ; z_2 = \frac{7}{5}$$

و بنابراین :

$$\sin x + \cos x = 1 ; \sin x + \cos x = \frac{7}{5}$$

جواب : $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = 2k\pi$

$$x = 2k\pi + 2\arctg \frac{1}{2}, \quad x = 2k\pi + 2\arctg \frac{1}{3}$$

۱۰۶۱. اگر فرض کنیم: $\sin x + \cos x = z$ بدست می‌آید:

$$1 + \sin 2x = z^2 \Rightarrow \sin 2x = z^2 - 1$$

باین ترتیب معادله مفروض بصورت معادله درجه دوم زیر درمی‌آید:

$$z^2 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow z_1 = 1, (z_2 = -3)$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x = 2k\pi : \text{جواب}$$

۱۰۶۲. داریم:

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x - 1}{\sin x} = 0 ;$$

که پس از صرفنظر کردن از مخرج و ساده کردن چنین می‌شود:

$$\cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

و این جوابها قابل قبولند، زیرا بازاء آنها مخرج کسر $\sin x \neq 0$ است.

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x = k\pi : \text{جواب} \quad ۱۰۶۳$$

$$x = k\pi : \text{جواب} \quad ۱۰۶۴$$

۱۰۶۵. داریم:

$$\operatorname{tg} x + \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

(مقادیر $\operatorname{tg} x = 1$ جزو ریشه‌های معادله نیست).

$$\operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, \quad x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

۱۰۶۶. رابطه زیر واضح است:

$$\sin 2X = \frac{2 \operatorname{tg} X}{1 + \operatorname{tg}^2 X}$$

اگر مقدار $\sin 2X$ را در معادله قرار دهیم، پس از ساده کردن چنین میشود.

$$\operatorname{tg}^3 X - 2 \operatorname{tg}^2 X + 3 \operatorname{tg} X - 2 = 0$$

و این معادله بصورت زیر قابل تجزیه است:

$$(\operatorname{tg} X - 1)(\operatorname{tg}^2 X - \operatorname{tg} X + 2) = 0 ;$$

$$\operatorname{tg} X = 1 \Rightarrow X = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

و معادله $\operatorname{tg}^2 X - \operatorname{tg} X + 2 = 0$ دارای ریشه‌های حقیقی نیست.

$$\text{جواب: } X = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۱۰۶۷. داریم:

$$\frac{\cos X}{\sin X} + \frac{2 \sin X}{\cos X} - \frac{5}{\sin X} = 0 ;$$

و از آنجا:

$$2 \cos^2 X + 5 \cos X - 3 = 0$$

$$\cos X = \frac{1}{2} \Rightarrow X = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$(\cos X = -3)$$

و این جوابها در معادله صدق می‌کنند، زیرا بازاء آنها $\sin X \neq 0$ و $\cos X \neq 0$ است.

$$\text{جواب: } X = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۰۶۸. داریم:

$$\frac{\sin^3 X}{\cos X \cdot \cos^2 X} = \frac{\sin^2 X}{\cos^3 X} ;$$

$$\frac{\sin^3 X (\cos^3 X - \cos X \cos^2 X)}{\cos X \cdot \cos^2 X \cdot \cos^3 X} = 0$$

که اگر در صورت کسر $\cos^3 X = \cos(X + 2X)$ قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$\frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0 \implies \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0$$

از آنجا خواهیم داشت :

$$\operatorname{tg} x = 0 \implies x = k\pi$$

$$\operatorname{tg} 2x = 0 \implies x = k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} 3x = 0 \implies x = k \cdot \frac{\pi}{3}$$

جوابهای معادله دوم بازاء مقادیر زوج k همان جوابهای معادله اول هستند و بازاء مقادیر فرد k در معادله اصلی صدق نمی کنند. از طرف دیگر جوابهای معادله اول جزو جوابهای معادله سوم قرار دارد (وقتی که در جوابهای معادله سوم k را مضربی از ۳ بگیریم همان جوابهای معادله اول بدست می آید) ، باین ترتیب همه جوابهای معادله بصورت $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ خواهد بود.

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad x = (2k+1)\pi \quad \text{جواب: } ۱۰۶۹$$

۱۰۷۰. راهنمایی : از رابطه زیر استفاده کنید :

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$x = \frac{k\pi}{3} \pm \arccos \frac{1}{3} \quad \text{جواب:}$$

۱۰۷۱. معادله را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{1}{2} (\cos x + \cos 3x) = \cos 3x \implies \cos x - \cos 3x = 0$$

$$\sin 2x \cdot \sin x = 0$$

$$\sin 2x = 0 \implies x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\sin x = 0 \implies x = k\pi$$

تمام ریشههای معادله دوم جزو ریشههای معادله اول قرار دارد .

$$x = \frac{k\pi}{2} : \text{جواب}$$

۱۰۷۱. داریم :

$$2 \sin^2 x \cos x = 2 \sin x \sin^2 x = \cos x - \cos^3 x$$

و معادله بصورت زیر درمی آید :

$$\cos x - \cos^3 x = \cos x - \sin x ;$$

$$\cos^3 x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3x \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2k\pi$$

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} ; 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} , x = k\pi - \frac{\pi}{4} : \text{جواب}$$

۱۰۷۳. داریم :

$$\frac{1}{4} \sin^4 x = \frac{1}{4} \sin^2 x \cos x$$

و معادله بصورت زیر درمی آید :

$$2 \sin x \sin^2 x \sin^2 x = \sin^2 x \cos^2 x ;$$

$$\sin^2 x (2 \sin x \sin^2 x - \cos^2 x) = 0$$

$$2 \sin x \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^4 x : \text{و چون داریم}$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = 0 : \text{خواهیم داشت}$$

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} , x = k \cdot \frac{\pi}{2} : \text{جواب}$$

۱۰۷۴. طبق فرض اعداد a, b, m و n به تصاعد حسابی هستند و بنابراین می توان نوشت :

$$b = a + d ;$$

$$m = a + 2d ;$$

$$n = a + 3d .$$

که در آن $d > 0$ قدر نسبت تصاعد حسابی است و اگر بجای b, m و n

مقادیرشان را قرار دهیم با توجه به روابط :

$$\sin ax \sin(a+d)x = \frac{1}{2} [\cos dx - \cos(2a+d)x]$$

$$\sin(a+2d)x \sin(a+2d)x = \frac{1}{2} [\cos dx - \cos(2a+4d)x]$$

معادله مفروض بصورت زیر در می آید :

$$\cos(2a+d)x - \cos(2a+4d)x = 0 ;$$

$$\sin(2a+2d)x \cdot \sin 2dx = 0$$

وازا آجا :

$$\sin(2a+2d)x = 0 \Rightarrow (2a+2d)x = k\pi ;$$

$$\sin 2dx = 0 \Rightarrow 2dx = k\pi$$

$$x = \frac{k}{2d}\pi , x = \frac{k}{b+m}\pi : \text{جواب}$$

(زیرا داریم : $(2a+2d) = (b+m)$)

۱۰۷۵. اگر فرض کنیم : $\sin x = a$ ، $\sin 2x = b$ ، $\sin 3x = c$ بدست می آید :

$$a^2 + b^2 + c^2 - (a+b+c)^2 = 0$$

عبارت سمت چپ تساوی را تجزیه می کنیم (مسئله ۷۹ را به بینید) :

$$2(a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

یعنی معادله مثلثاتی چنین است :

$$(\sin x + \sin 2x)(\sin 2x + \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) = 0 \quad (۱)$$

از طرف دیگر داریم :

$$\sin x + \sin 2x = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\sin 2x + \sin 3x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$$

که اگر در معادله (۱) قرار دهیم می شود :

$$\sin \frac{3X}{2} \sin \frac{\Delta X}{2} \cos \frac{2X}{2} \cdot \sin 2X \cos X = 0$$

واز آنجا :

$$\sin \frac{3X}{2} = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{2k\pi}{3} ;$$

$$\sin \frac{\Delta X}{2} = 0 \Rightarrow X_2 = \frac{2k\pi}{\Delta}$$

$$\cos \frac{X}{2} = 0 \Rightarrow X_3 = (2k+1)\pi ;$$

$$\sin 2X = 0 \Rightarrow X_4 = \frac{k\pi}{2} ;$$

$$\cos X = 0 \Rightarrow X_5 = k\pi + \frac{\pi}{2} .$$

جوابهای X_3 و X_5 جزو جوابهای X_4 وجود دارند .

$$\text{جواب : } X = \frac{k}{2}\pi , X = \frac{2k}{\Delta}\pi , X = \frac{2k}{3}\pi$$

۱۰۷۶ . داریم :

$$(\sin^2 X)^5 + (\cos^2 X)^5 = \frac{29}{16} \cos^4 2X$$

که می توان آنرا بصورت زیر نوشت :

$$(1 - \cos^2 X)^5 + (1 + \cos^2 X)^5 = 58 \cos^4 2X$$

اگر پرانتزها را باز کنیم به معادله دوم جذوری زیر می رسم :

$$24 \cos^4 2X - 10 \cos^2 2X - 1 = 0$$

که دارای دوریشه حقیقی (ودوریشه موهومی) است :

$$\cos 2X = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2X = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} ,$$

$$\cos 2X = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2X = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} .$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}, \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{8} : \text{جواب}$$

۱۰۷۷. داریم :

$$\sin(\pi \cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin x\right)$$

و از آنجا (مسئله ۱۰۱۵) را به بینید :

$$\pi \cos x + \frac{\pi}{2} - \pi \sin x = (2k + 1)\pi ;$$

$$\pi \cos x - \frac{\pi}{2} + \pi \sin x = 2k\pi$$

که پس از عملیات عادی خواهیم داشت :

$$a) \quad \cos x - \sin x = 2k + \frac{1}{2} ;$$

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2k + \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2k + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$b) \quad \cos x + \sin x = 2k + \frac{1}{2} ;$$

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2k + \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2k + 1}{2\sqrt{2}}$$

از طرف دیگر نامساوی $\left| \frac{2k + 1}{2\sqrt{2}} \right| \leq 1$ تنها وقتی برقرار است که

$k = 0$ باشد ، بنابراین خواهیم داشت :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} ;$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} ;$$

$$x = 2m\pi \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} ; \quad \text{و از آنجا :}$$

$$x = 2m\pi \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2m\pi \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} \pm \frac{\pi}{4} : \text{جواب}$$

۱۰۷۸. داریم :

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cotg x\right) \quad (۱)$$

و از آنجا (مسئله ۱۰۱۷ را به بیند) :

$$\pi \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2} + \pi \cotg x = k\pi ; \quad (۲)$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x - (2k+1) \operatorname{tg} x + 2 = 0 \quad \text{یعنی :}$$

و از آنجا :

$$\operatorname{tg} x = \frac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{2} \quad (۳)$$

بسادگی دیده می شود که معادلات (۱) و (۲) هم ارز نیستند ، زیرا مثلاً اگر معادله (۲) بازاء مقادیری از :

$$\operatorname{tg} x = \frac{2k+1}{2} \quad (۴)$$

صادق باشد (k عددی است صحیح) ، این مقادیر در معادله (۱) صدق نمیکنند ، زیرا بازاء این مقادیر $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)$ مفهوم خود را از دست می دهد . بنابراین جوابهایی از معادله (۲) که بصورت (۴) باشند باید از بین جوابها حذف شوند . طبق رابطه (۳) وقتی $\operatorname{tg} x$ وجود دارد که نامساوی $(2k+1)^2 - 16 \geq 0$ برقرار باشد ، بنابراین مقادیر 2 ; ± 1 ; 0 ; k از بین مقادیر k حذف می شوند . علاوه بر آن اگر $\operatorname{tg} x$ بخواهد بصورت (۴) باشد باید قبل از همه مقدار زیر رادیکال در رابطه (۳) مجذور کامل شد . فرض می کنیم :

$$2k+1 = y ; (2k+1)^2 - 16 = z^2$$

(z عددی است صحیح) ، بدست می آید :

$$y^2 - 16 = z^2 \Rightarrow (y - z)(y + z) = 16 \quad (5)$$

برای حل این معادله سیال که شامل دو مجهول با مقادیر صحیح است فرض می کنیم :

$$y - z = u ; y + z = v \quad (*)$$

معادله (5) به این صورت درمی آید :

$$u \cdot v = 16 \quad (6)$$

وقتی که y و z اعدادی صحیح هستند ، u و v اعدادی صحیح خواهند بود و برای u و v جوابهای زیر بدست می آید :

$$\left| \begin{array}{l} u_{1,2} = \pm 2 \\ v_{1,2} = \pm 8 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} u_{2,4} = \pm 8 \\ v_{2,4} = \pm 2 \end{array} \right|$$

باجل دستگاه (*) بدست می آید :

$$y = \frac{u+v}{2}$$

که با توجه باینکه $y = 2k + 1$ عددی است فرد ، خواهیم داشت :

$$y = \pm 5$$

بازاء $y = 5$ داریم ; $k = 2$

وبازاء $y = -5$ داریم : $k = -3$

بازاء $k = 2$ از رابطه (3) بدست می آید :

$$\operatorname{tg} x = 2 ; \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$$

وبازاء $k = -3$:

$$\operatorname{tg} x = -2 ; \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$$

جوابهای $\operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{2}$ در معادله مفروض صدق نمی کنند ولی جوابهای زیر

در آن صدق می کنند :

$$\operatorname{tg} x = \pm 2 \quad (7)$$

روابط (۲) و (۷) جوابهای معادله را بدست می دهند .

$$x = m\pi + \operatorname{arctg} \frac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4} : \text{ جواب}$$

$$x = n\pi \pm \operatorname{arctg} 2$$

که در آنها m و n اعدادی صحیح و دلخواه و k برابر ± 3 ، ± 4 ، ± 5 ، می باشد .

۱۰۷۹. داریم (باتوجه به مسئله ۱۰۱۶) :

$$\pi x^2 + 2\pi x = 2k\pi \quad (k = 0 \text{ و } \pm 1 \text{ و } \pm 2, \dots)$$

واز آنجا :

$$x^2 + 2x - 2k = 0 \Rightarrow x = \overline{-1 + \sqrt{2k+1}}$$

ریشه های این معادله وقتی حقیقی هستند که مقدار زیر رادیکال مثبت باشد :

$$2k+1 \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$$

برای اینکه معادله ریشه صحیح داشته باشد باید $\sqrt{2k+1}$ عددی صحیح باشد (یعنی $2k+1$ مجذور کامل شود)، ولی واضح است که اگر عدد فرد $2k+1$ مجذور کامل باشد $\sqrt{2k+1}$ هم عددی فرد خواهد بود و در این صورت برای x اعداد زوجی بدست خواهد آمد .

۱۰۸۰. داریم :

$$\left| \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left| \frac{2}{\sin 2x} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

۱. اگر داشته باشیم : $\sin 2x > 0$ ، خواهیم داشت :

$$\frac{2}{\sin 2x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3} : \text{ واز آنجا}$$

۲. اگر $\sin 2x < 0$ باشد، داریم :

$$-\frac{2}{\sin 2x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و از آنجا: $2x = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{3}$

جواب: $x = \frac{k\pi}{2} \pm (-1)^k \frac{\pi}{6}$

۱۰۸۱. رابطه زیر را می‌دانیم:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

معادله مفروض بصورت زیر درمی‌آید:

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2 \sin x \cos x - n \sin x = 0;$$

$$\sin x (3 - 4 \sin^2 x + 2 \cos x - n) = 0;$$

۱) $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

۲) $3 - 4 \sin^2 x + 2 \cos x - n = 0$

$$4 \cos^2 x + 2 \cos x - (n+1) = 0$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{4n+5}}{4}.$$

و برای اینکه جوابهای اخیر وجود داشته باشند لازم است:

a) $4n+5 \geq 0 \Rightarrow n \geq -\frac{5}{4}$

b) $\left| \frac{-1 \pm \sqrt{4n+5}}{4} \right| \leq 1$

بنابراین اگر داشته باشیم:

$$\cos x = \frac{-1 + \sqrt{4n+5}}{4}$$

خواهیم داشت:

$$-1 \leq \frac{-1 + \sqrt{4n+5}}{4} \leq 1 \Rightarrow n \leq 5$$

و اگر داشته باشیم:

$$\cos x = \frac{-1 - \sqrt{4n+5}}{4}$$

باید داشته باشیم :

$$-4 \leq \sqrt{4n+5} \leq 3 \Rightarrow n \leq 1$$

باتوجه به نتایجی که بدست آوردیم ، ریشه های معادله بدست می آید :
۱. اگر $1 < n \leq 5$ باشد داریم :

$$\left| \begin{array}{l} x = 2k\pi + \arccos \frac{-1 + \sqrt{4n+5}}{4} \\ x = k\pi \end{array} \right.$$

۲. اگر $1 \leq n \leq -\frac{5}{4}$ باشد ، داریم :

$$\left| \begin{array}{l} x = 2k\pi + \arccos \frac{-1 + \sqrt{4n+5}}{4} \\ x = k\pi \end{array} \right.$$

۳. و بالاخره اگر $n > 5$ یا $n < -\frac{5}{4}$ باشد ، داریم :

$$x = k\pi$$

۱۰۸۲. معادله را می توان بصورت زیر نوشت :

$$4^{2\sin x} = \frac{1}{4^{\cos x}}$$

و از آنجا نتیجه می شود :

(۱) $\cos x \neq 0$ زیرا در غیر اینصورت سمت راست معادله دارای مفهوم نیست :

$$2\sin x = \frac{1}{\cos x} \quad (2)$$

که باحل این معادله ، بدست می آید :

$$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

جواب : $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۰۸۳. داریم :

$$(\sqrt{2} \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x - 1) \log \cos^2 x = -\log \cos^2 x$$

$$\sqrt{2}(\cos^2 x + \sqrt{2} \cos x) \log \cos^2 x = 0 \quad \text{و یا :}$$

اگر $\log \cos^2 x = 0$ باشد ، داریم :

$$\cos^2 x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} x = \sqrt{2} k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

و اگر $\cos^2 x + \sqrt{2} \cos x = 0$ باشد ، داریم :

$$\sqrt{2} \cos^2 x - \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \cos x = 0 ;$$

$$\cos x (\sqrt{2} \cos^2 x - 1) = 0 ;$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} ;$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2} k\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2} k\pi + \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}}$$

۱۰۸۴. داریم :

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = \sqrt{2} k\pi ;$$

$$\sin^2 x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \sin x = 1, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x = 1 \left(x = \sqrt{2} k\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) ;$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2} k\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$x = \sqrt{2} k\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}}, x = \sqrt{2} k\pi \quad \text{جواب :}$$

۱۰۸۵. راهنمایی (مسئله ۱۰۵۶ را به بینید) :

$$\pi \log x = \sqrt{2} k\pi \Rightarrow x = 10^{\sqrt{2} k}$$

$$\pi \log x = \sqrt{2} k\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 10^{\sqrt{2} k + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

۱۰۸۶. از رابطه زیر استفاده می کنیم :

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

در اینصورت معادله مفروض بصورت زیر درمی آید :

$$\log_7 \sin x \cdot \log_7 \sin^2 x = 1$$

اگر فرض کنیم $\log_7 \sin x = z$ بدست می آید :

$$7^z = \sin x$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$z^2 \log_7 7 = 1 \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{1}{7} \log_7 7}$$

$$\log_7 \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{7} \log_7 7}$$

$$\sin x = 7^{-\sqrt{\frac{1}{7} \log_7 7}} \quad \left(\sin x = 7^{\sqrt{\frac{1}{7} \log_7 7}} \right)$$

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin 7^{-\sqrt{\frac{1}{7} \log_7 7}} \quad \text{جواب :}$$

۱۰۸۷. داریم (مسئله ۱۰۸۶ را به بینید) :

$$\log_{\cos x} \sin x + \frac{1}{\log_{\cos x} \sin x} - 2 = 0 ;$$

$$(\log_{\cos x} \sin x)^2 - 2 \log_{\cos x} \sin x + 1 = 0 ;$$

$$(\log_{\cos x} \sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \log_{\cos x} \sin x = 1 ;$$

و از آنجا بدست می آید :

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{جواب :}$$

۱۰۸۸. معادله مفروض را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\lg x (\lg x + 2 \lg x + 1) + (\lg x - 2 \lg x + 1) = 0 ;$$

$$\lg x (\lg x + 1)^2 + (\lg x - 1)^2 = 0$$

و چون مقداری برای x پیدا نمی شود که به ازاء آن $tg x + 1$ و $tg x - 1$ باهم مساوی صفر شوند، معادله مفروض جواب ندارد.

$$x = 4, x = 2 : \text{ جواب } 1089$$

1090. داریم :

$$\sin(2 \arcsin x) = \sin(\arcsin 2x) ;$$

$$2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x ;$$

$$x \sqrt{1-x^2} = x$$

خواب : $x = 0$

1091. راه حل اول. فرض می کنیم :

$$\arccos x = a ; \arcsin x = b$$

در این صورت داریم :

$$\cos a = \sin b = x$$

و معادله مفروض بصورت زیر درمی آید :

$$a - b = \arccos \frac{\sqrt{r}}{r} \Rightarrow \cos(a - b) = \frac{\sqrt{r}}{r} ;$$

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b = \frac{\sqrt{r}}{r} ;$$

$$x \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{r}}{r} ;$$

$$2x \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

که با حل این معادله گنگ ریشه های معادله مفروض بدست می آید.
راه حل دوم : داریم :

$$\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6} ;$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} ;$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{3} \quad \text{و از آنجا :}$$

جواب : $x = \frac{1}{2}$.

۱۰۹۲ . جواب : $x = \sqrt{3} - 1$

۱۰۹۳ . جواب : $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$.

۱۰۹۴ . جواب : $x = \pm \frac{1}{3}$.

۱۰۹۵ . جواب : $x = 0$, $x = \pm 1$

۱۰۹۶ . راهنمایی : با استفاده از رابطه :

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

و با شرط $x+y=n$ خواهیم داشت :

$$\sin(x-y) = 2m - \sin n$$

جواب : $x = \frac{n}{2} + \frac{k\pi}{2} + \frac{(-1)^k}{2} \arcsin(2m - \sin n)$

$$y = \frac{n}{2} - \frac{k\pi}{2} - \frac{(-1)^k}{2} \arcsin(2m - \sin n)$$

با شرط : $|2m - \sin n| \leq 1$

۱۰۹۸ . معادله اول را می توان بصورت زیر نوشت :

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = m$$

که با در نظر گرفتن معادله دوم دستگاه بصورت زیر درمی آید :

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{m}{2 \sin \frac{n}{2}} ;$$

بنابراین :

$$x-y = 2k\pi + 2 \arccos \frac{m}{2 \sin \frac{n}{2}}$$

$$x + y = n$$

۱. اگر $\left| \frac{m}{2 \sin \frac{n}{2}} \right| \leq 1$ و $\sin \frac{n}{2} \neq 0$ یعنی $n \neq 2k\pi$ باشد، در این

صورت دستگاه مفروض جوابهای عمومی زیر را خواهد داشت :

$$\begin{cases} x = \frac{n}{2} \pm \arccos \frac{m}{2 \sin \frac{n}{2}} + 2k\pi ; \\ y = \frac{n}{2} \mp \arccos \frac{m}{2 \sin \frac{n}{2}} - 2k\pi . \end{cases}$$

۲. اگر $\left| \frac{m}{2 \sin \frac{n}{2}} \right| > 1$ و یا $n = 2k\pi$ باشد، دستگاه مفروض دارای

جواب نیست .

۱۰۹۹. معادله اول دستگاه را بصورت زیر می نویسیم :

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \Delta \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{x-y}{2} = \Delta ;$$

که بادر نظر گرفتن معادله دوم دستگاه خواهیم داشت :

$$\operatorname{cotg} \frac{x-y}{2} = \Delta$$

و بنابراین :

$$\begin{cases} x - y = 2k\pi + 2 \operatorname{arccotg} \Delta \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi + \operatorname{arccotg} \Delta \\ y = \frac{\pi}{4} - k\pi - \operatorname{arccotg} \Delta \end{cases} \quad \text{جواب :}$$

۱۱۰۰. از معادله اول دستگاه بدست می آوریم :

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = m \Rightarrow \cos x \cos y = \frac{\sin(x+y)}{m}$$

که اگر قرار دهیم $x+y=n$ و در نظر داشته باشیم :

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

بدست می آید :

$$\cos(x-y) = \frac{2 \sin n}{m} - \cos n$$

و از آنجا :

$$x-y = 2k\pi \pm \arccos\left(\frac{2 \sin n}{m} - \cos n\right)$$

که از حل این معادله با معادله دوم دستگاه، مقادیر x و y بدست می آید .

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{n}{2} \pm \arccos\left(\frac{2 \sin n}{m} - \cos n\right) \\ y = -k\pi + \frac{n}{2} \mp \arccos\left(\frac{2 \sin n}{m} - \cos n\right) \end{cases} \quad \text{جواب :}$$

$$\left| \frac{2 \sin n}{m} - \cos n \right| \leq 1 \quad \text{بشرط}$$

۱۱۰۱. راهنمایی، داریم :

$$y = n\pi - x$$

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(n\pi - x) = -\operatorname{tg} x$$

و معادله اول دستگاه بصورت زیر درمی آید :

$$2 \operatorname{tg} x = m \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{m}{2}$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{m}{2} \\ y = (n-k)\pi - \operatorname{arctg} \frac{m}{2} \end{cases} \quad \text{حواب :}$$

۱۱۰۲. معادله اول دستگاه را به ترتیب می‌توان چنین نوشت :

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{m}{1} \Rightarrow \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{1+m}{1-m};$$

$$\cos(x-y) = \frac{1+m}{1-m} \cos n; \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{n}{2} + k\pi + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1+m}{1-m} \cos n\right) \\ y = \frac{n}{2} - k\pi + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1+m}{1-m} \cos n\right) \end{array} \right. \quad \text{جواب:}$$

$$\text{با شرایط: } \left| \frac{1+m}{1-m} \cos n \right| \leq 1 \text{ و } m \neq 1$$

۱۱۰۳. معادله اول دستگاه را می‌توان چنین نوشت :

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = 1$$

که با در نظر گرفتن معادله دوم دستگاه داریم :

$$\sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x+y = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4}$$

و یا در حالت زوج بودن k ($k=2n$) :

$$x+y = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

معادله دوم دستگاه را به مجموع تبدیل می‌کنیم :

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \sqrt{2};$$

و بجای $x+y$ (در حالت زوج بودن k) مقدارش را قرار می‌دهیم :

$$\cos(x-y) = \sqrt{2} - \cos\left[k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}\right] (k=0, 2, 4, \dots)$$

$$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x-y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

و حالا باید دستگاه زیر را حل کنیم :

$$\begin{cases} x+y=2n\pi+\frac{\pi}{2} \\ x-y=2n'\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

برای حالتی هم که k عددیست فرد ، شبیه حالت بالا حل می شود .
۱۱۰۴ . راهنمایی :

$$\frac{\cos y}{1} = \frac{\cos x - n}{1 - n \cos x} ;$$

$$\frac{1 - \cos y}{1 + \cos y} = \frac{1 + n}{1 - n} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+n}{1-n}} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \text{واز آنجا :}$$

بنابراین :

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{m}{2n} (n - 1 \pm \sqrt{1 - n^2})$$

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{m}{2n} (n + 1 \pm \sqrt{1 - n^2})$$

$$\begin{cases} x = 2 \left[k\pi + \operatorname{arctg} \frac{m}{2n} (n - 1 \pm \sqrt{1 - n^2}) \right] \\ y = 2 \left[k\pi + \operatorname{arctg} \frac{m}{2n} (n + 1 \pm \sqrt{1 - n^2}) \right] \end{cases} \quad \text{جواب :}$$

(با شرط $n < 1$)

$$\begin{cases} \cos x = \pm \frac{\sqrt{29} \pm \sqrt{5}}{12} \\ \cos y = \pm \frac{\sqrt{29} \mp \sqrt{5}}{12} \end{cases}$$

۱۱۰۵ . جواب :

§ ۱۹. مسائل هندسه مسطحه (مورد استعمال مثلثات).

۱۱۰۶. چهارضلعی ODBM ، ODCM و OMAN را در نظر می گیریم (شکل ۵۵). در هر يك از این چهارضلعی ها ، مجموع دو زاویه روبرو برابر با ۱۸۰ درجه است و بنا بر این می توان بر هر يك از آنها يك دایره محیط نمود. زوایای مثلث DMN را محاسبه می کنیم :

$$\left. \begin{aligned} & \widehat{ODM} = \widehat{OBM} = 90^\circ - \alpha \\ & + \widehat{ODN} = \widehat{OCN} = 90^\circ - \alpha \\ & \hline & \widehat{ODM} + \widehat{ODN} = \widehat{MND} = \\ & \qquad \qquad \qquad = 180^\circ - 2\alpha \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{در هر دایره زوایای محاطی} \\ \text{روبرو به کمانهای مساوی،} \\ \text{برابرند.} \end{array}$$

$$\widehat{MND} = 180^\circ - 2\alpha$$

یعنی .

و به همین ترتیب :

$$\widehat{OMD} = \widehat{OBD} = 90^\circ - \gamma$$

$$\widehat{OMN} = \widehat{OAN} = 90^\circ - \gamma$$

و از آنجا :

$$\widehat{DMN} = 180^\circ - 2\gamma$$

$$\widehat{MND} = 180^\circ - 2\beta$$

شکل ۵۵

و شبیه آن :

برای محاسبه اضلاع مثلث DMN به تشام دو مثلث ABC و BMD توجه می کنیم ($\widehat{BMD} = 90^\circ - \widehat{OMD} = \gamma$ و β در دو مثلث مشترک است). داریم :

$$\frac{MD}{AC} = \frac{BD}{AB} = \cos \beta ;$$

$$MD = AC \cos \beta = b \cdot \cos \beta$$

و از آنجا :

$$ND = c \cdot \cos \gamma$$

و شبیه آن :

$$MN = a \cdot \cos \alpha$$

و مساحت مثلث DMN :

$$S = \frac{1}{2} MN \cdot MD \sin(180^\circ - 2\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2} a \cos \alpha \cdot b \cos \beta \cdot \sin(180^\circ - 2\gamma) = \frac{1}{2} ab \cos \alpha \cos \beta \sin 2\gamma$$

۱۱۰۷. راه حل اول. مساحت مثلث مفروض را S و مساحت مثلث ارتفاعیه را S' و زوایای مثلث مفروض را α ، β و γ فرض می‌کنیم. داریم (مسئله ۱۱۰۶ را به‌یاد آورید):

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} ab \cos \alpha \cos \beta \sin 2\gamma = ab \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma = \\ &= ab \sin \gamma \cdot (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \text{و چون داریم:}$$

$$S' = 2S \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \quad \text{خواهیم داشت:}$$

از طرف دیگر بنا بر قضیه کسینوسها در مثلث بدست می‌آید:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

و بنابراین:

$$S' = \frac{S}{4} \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{a^2 b^2 c^2};$$

راه حل دوم. داریم (شکل ۵۵ را به‌یاد آورید):

$$AM = b \cos \alpha; \quad BD = c \cos \beta; \quad CN = a \cos \gamma;$$

$$AN = c \cos \alpha; \quad BM = a \cos \beta; \quad CD = b \cos \gamma;$$

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} bc \cos^2 \alpha \sin \alpha = S \cdot \cos^2 \alpha;$$

$$S_{MBD} = \frac{1}{2} ac \cos^2 \beta \sin \beta = S \cos^2 \beta$$

$$S_{NDC} = \frac{1}{2} ab \cos^2 \gamma \sin \gamma = S \cos^2 \gamma$$

و مساحت مثلث مورد نظر :

$$\begin{aligned} S' &= S - (S_{AMN} + S_{NDC} + S_{MBD}) = \\ &= S(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma) = \\ &= S(1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \end{aligned}$$

که اگر مقادیر کسینوس زوایای مثلث را بر حسب اضلاع قرار دهیم ، رابطه مساحت مثلث مطلوب بدست می آید .

$$S = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \quad \text{. ۱۱۰۸ جواب :}$$

۱۱۱۰ . $\alpha \neq 45^\circ$ فرض می کنیم (شکل ۳۴ را به بینید) ، داریم :

$$BD = 2ED = 2\sqrt{OD^2 - OE^2} = 2\sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha}$$

و شبیه آن :

$$AC = 2FC = 2\sqrt{R^2 - a^2 \cos^2 \alpha} ;$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

$$S = 2\sqrt{(R^2 - a^2 \cos^2 \alpha)(R^2 - a^2 \sin^2 \alpha)} \quad \text{جواب :}$$

۱۱۱۱ . فرض می کنیم وترهای $AB = a$ ، $BC = b$ و $CD = c$ باشند (شکل ۵۶) ، طبق فرض مسئله داریم :

$$a : b : c = 1 : 2 : 1$$

ارتفاعات OE و OF را رسم می کنیم و فرض می کنیم $\widehat{AOB} = x$ و $\widehat{BOC} = \varphi$. داریم :

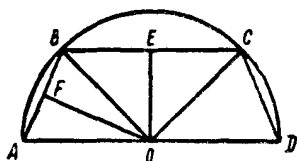
$$\sin \frac{x}{2} = \frac{a}{2R} ; \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{2R}$$

بنابراین :

$$\sin \frac{x}{2} : \sin \frac{\varphi}{2} = a : b = 1 : 2$$

و از آنجا :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = 2 \sin \frac{x}{2}$$



شکل ۵۶

و چون داریم : $\varphi = \pi - 2x$ ، خواهیم داشت :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x$$

و بنابراین معادله زیر را داریم :

$$\cos x = 2 \sin \frac{x}{2} ;$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} - 1 = 0 \quad \text{و یا :}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} =$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12}$$

$$x = 2 \arcsin \left(\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \text{جواب :}$$

$$\varphi = 2 \arcsin \left(\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

۱۱۱۲. (اولا) اگر اضلاع a ، b و c از مثلث قائم الزاویه ای به تصاعد حسابی باشند و $a < b < c$ باشد ، باید داشته باشیم :

$$b = \frac{a+c}{2} \quad (۱)$$

از طرف دیگر چون مثلث ABC قائم الزاویه است ، داریم :

$$\left. \begin{aligned} a &= c \cdot \cos \beta \\ b &= c \cdot \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (۲)$$

و بنابراین رابطه (۱) بصورت زیر درمی آید :

$$c \cdot \sin \beta = \frac{c(\cos \beta + 1)}{2} ;$$

$$2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\beta}{2} \quad \text{و یا .}$$

و چون $\cos \frac{\beta}{2} \neq 0$ است ، می توان طرفین این تساوی را بر $\cos \frac{\beta}{2}$ تقسیم کرد :

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} ;$$

$$\beta = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \Rightarrow \beta \neq 53^{\circ} 8'$$

(۲) وقتی که اضلاع مثلث با شرط $a < b < c$ به تصاعد هندسی باشند ، باید داشته باشیم :

$$b^2 = ac \quad (۲)$$

رابطه (۳) را با توجه به مقادیر رابطه (۲) تبدیل می کنیم ، می شود :

$$c^2 \sin^2 \beta = c \cos \beta ;$$

$$\cos^2 \beta + \cos \beta - 1 = 0 ; \quad \text{یا :}$$

$$\cos \beta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} ;$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \Rightarrow \beta \neq 38^{\circ} 10' / 3$$

۱۱۱۳ . داریم (شکل ۵۷) :

$$OB = m ; \widehat{BON} = \widehat{BAD} = \alpha$$

از مثلثهای AOD و BON بدست می آید :

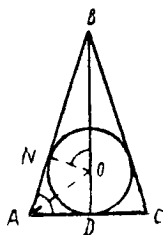
$$r = m \cos \alpha ;$$

$$AD = r \cotg \frac{\alpha}{2}$$

و از آنجا :

$$AC = 2r \cotg \frac{\alpha}{2}$$

$$AC = 2m \cos \alpha \cotg \frac{\alpha}{2}$$



شکل ۵۷
یا :

۱۱۱۴. از شرط مسئله نتیجه می‌شود که هر يك از زوایای مرکزی برابر ۶۰ درجه‌اند.

R را روی شعاع مجاورش تصویر می‌کنیم :

$$r_1 = R \cos 60^\circ$$

r_1 را بر شعاع بعدی مجاورش تصویر می‌کنیم :

$$r_2 = r_1 \cos 60^\circ = R \cos^2 60^\circ$$

و بنابراین :

$$r_3 = r_2 \cos 60^\circ = R \cos^3 60^\circ$$

.....

$$r_6 = R \cos^6 60^\circ = R \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

جواب : $r_6 = 2 \text{ cm}$

۱۱۱۵. جواب : $6/5$ میل ،

۱۱۱۶. فرض می‌کنیم $AB = a_n$ ، ضلع n ضلعی منتظم محاطی باشد (شکل ۵۸) ، داریم :

$$\widehat{AOC} = \frac{1}{n} \widehat{AOB} = \frac{180^\circ}{n} = \varphi$$

از مثلث AOC بدست می‌آید :

$$AC = r \sin \varphi$$

و بنابراین :

$$a_n = 2AC = 2r \sin \varphi$$

و سهم :

$$OC = r \cos \varphi$$

محیط چند ضلعی :

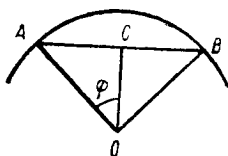
$$P_n = 2nr \sin \varphi$$

و بالاخره مساحت چند ضلعی :

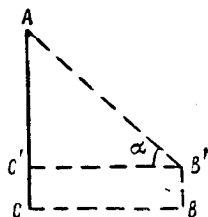
$$S_n = \frac{1}{2} nr^2 \sin 2\varphi$$

۱۱۱۷. ارتفاع شیئی مورد نظر را $AC = H$ و ارتفاع زاویه یاب را

$BB' = h$ می گیریم . زاویه یاب را در نقطه B قرار می دهیم (شکل ۵۹) و



شکل ۵۸



شکل ۵۹

زاویه α و $BC = d$ را اندازه می گیریم ، از مثلث قائم الزاویه $AB'C'$ بدست می آید :

$$H = d \cdot \operatorname{tg} \alpha + h$$

$$(d = ۲۰/۵^m ; \alpha = ۳۶^{\circ}۲۰' ; h = ۱/۳۷^m)$$

$$\text{جواب : } H = ۱۶/۵۴^m$$

۱۱۱۸ . ارتفاع شیئی را که نمی توان به پای آن دسترسی پیدا کرد مساوی H و ارتفاع زاویه یاب را h می گیریم .

روی خط راست BC ، نقطه D را در نظر می گیریم و فاصله $DC = d$ را محاسبه می کنیم . زاویه یاب را ابتدا در C و سپس در D قرار می دهیم و زوایای α و β را اندازه می گیریم (شکل ۶۰) ، از مثلث $D'AC'$ بنا بر قضیه سینوسها بدست می آید :

$$AD' = \frac{d \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

از مثلث قائم الزاویه $B'AD'$ بدست می آید :

$$AB' = AD' \sin \beta = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

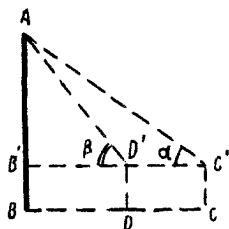
و باین ترتیب :

$$H = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} + h$$

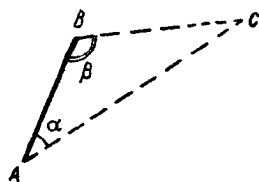
$$(DC = 11^m ; \alpha = 35^\circ ; \beta = 49^\circ ; h = 1,37^m)$$

$$H = 21,1^m : \text{جواب}$$

۱۱۱۹. از ساحل رودخانه (شکل ۶۱) پاره خط راست $AB = d$ را می کشیم و زوایای α و β را محاسبه می کنیم.



شکل ۶۲



شکل ۶۱

از مثلث ABC ، طبق قضیه سینوسها، بدست می آید:

$$BC = \frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$(AB = 100^m ; \alpha = 44^\circ ; \beta = 74^\circ ; AB = 16^m ; \alpha = 22^\circ \text{ و } 57' ; \beta = 143^\circ 8')$$

$$\text{جواب: } (BC = 39^m \text{ و } BC = 78,7^m)$$

۱۱۲۰. فرض کنیم دو نقطه A و B ، که باید فاصله بین آنها را اندازه بگیریم، قابل رؤیت ولی غیر قابل دسترس باشند.

برای حل مسئله $CD = d$ را رسم و شکل را می سازیم (شکل ۶۲)، فاصله d و زوایای $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ را اندازه می گیریم. از مثلث BDC بدست می آید:

$$BC = \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\beta_1 + \alpha_2)}$$

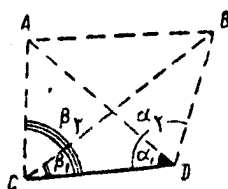
و از مثلث ACD :

$$AC = \frac{d \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_2)}$$

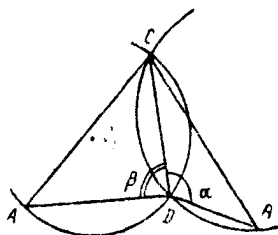
فاصله $\widehat{ACB} = \beta_2 - \beta_1$ و زاویه BC و AC با در دست داشتن اضلاع AC و BC مجهول AB بدست می آید ($\alpha_1 = 42^\circ 1'$ ، $\alpha_2 = 81^\circ 15'$ ، $d = 20^m$)
 $(\beta_1 = 52^\circ 40'$ ، $\beta_2 = 86^\circ 40'$

جواب : $AB = 16,3^m$

۱۱۲۱. ا) پاره خطهای AC و BC را بعنوان وتر در نظر گرفته و روی آنها کمانهایی در خور زوایای مفروض α و β رسم می کنیم ، این کمانها



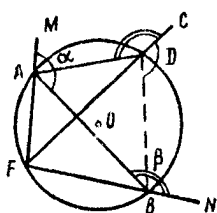
شکل ۶۲



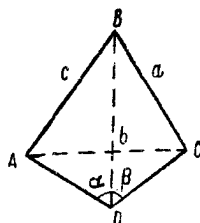
شکل ۶۳

در نقطه دیگری غیر از C ، و مثلاً نقطه D ، یکدیگر را قطع می کنند .
 نقطه D ، نقطه مطلوب است (شکل ۶۳) .

واضح است در حالتی که نقطه مجهول D و سه نقطه مفروض بريك دایره



شکل ۶۴



شکل ۶۵

واقع باشند ، حل مسئله ممکن نیست ، زیرا دو دایره بیک دایره تبدیل می‌شوند .

(b) در نقطه A (شکل ۶۴) زاویه $\widehat{BAM} = \alpha$ و در نقطه B ، زاویه $\widehat{ABN} = \beta$ را رسم می‌کنیم . نقطه F محل تلاقی دو خط MA و NB را به نقطه سوم C وصل می‌کنیم . در نقطه A ، زاویه $\widehat{BAD} = \widehat{BFC}$ را رسم می‌کنیم ، نقطه D یعنی نقطه تلاقی دو خط AD و FC ، نقطه مورد نظر خواهد بود .

برای اینکه بتوانیم جواب مسئله را بدست آوریم ، کافی است دایره‌ای که از سه نقطه A ، D و B عبور می‌کند ، از نقطه F هم بگذرد ، زیرا $\widehat{BAD} = \widehat{BFC}$ (هر دو زاویه محاطی و روبروی بیک کمان اند) .

$$\widehat{CDB} = \widehat{MAB} = \alpha ;$$

$$\widehat{CDA} = \widehat{NBA} = \beta$$

زیرا زوایای مکمل آنها ، زوایائی محاطی و روبروی بیک کمان اند .

(c) نقطه D وقتی معلوم است (شکل ۶۵) که فواصل DA ، DB و DC معلوم باشد . زاویه $\widehat{ABC} = \gamma$ را معلوم می‌گیریم (باعدست داشتن سه ضلع مثلث ABC ، می‌توان این زاویه را محاسبه کرد) . دو زاویه $\widehat{BAD} = x$

و $\widehat{BCD} = y$ را مجهول می‌گیریم .

مجموع زوایای داخلی چهارضلعی $ABCD$:

$$x + y + \alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$$

واز آنجا :

$$\frac{x+y}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

از مثلثهای ABD و BCD طبق قضیه سینوسها داریم :

$$BD = \frac{c \sin x}{\sin \alpha} ; BD = \frac{a \sin y}{\sin \beta}$$

$$\frac{c \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a \sin \gamma}{\sin \beta} \quad \text{یا :}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a \sin \alpha}{c \sin \beta} \quad \text{یعنی :}$$

زاویهٔ کمکی φ را در نظر می‌گیریم :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \sin \alpha}{c \sin \beta}$$

(زاویهٔ φ را می‌توان با کمک لگاریتم بدست آورد) . از آنجا :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \operatorname{tg} \varphi$$

تناسب زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\frac{\sin \alpha - \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1} ;$$

و یا پس از تبدیل بصورت ضرب بدست می‌آید :

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2}} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ)$$

و از آنجا :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

که اگر بجای $\frac{\alpha + \gamma}{2}$ مقدارش را قرار دهیم ، میشود :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ) \operatorname{tg} \left(180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right) ; \quad (A)$$

و از آنجا $\frac{\alpha - \gamma}{2}$ بدست می‌آید .

با در دست داشتن $\frac{\alpha + \gamma}{2}$ و $\frac{\alpha - \gamma}{2}$ مقادیر α و γ بدست می‌آید .

و سپس از مثلثهای ABD و BCD فواصل مجهول بدست می آید :

$$AD = \frac{c \sin(\alpha + x)}{\sin \alpha} ;$$

$$BD = \frac{c \sin x}{\sin \alpha} ;$$

$$CD = \frac{a \sin(\beta + y)}{\sin \beta}$$

و در نتیجه موضع نقطه D بدست می آید (مگر در حالت خاصی که ضمن تبصره زیر روشن کرده ایم) .

تبصره . ۱) برای حل این مسئله باید در نظر داشت که نقطه مجهول نسبت به سه نقطه مفروض شش وضع مختلف می تواند داشته باشد . وضع این نقطه می تواند حالت های زیر را داشته باشد : در داخل مثلث ABC باشد، در خارج مثلث ولی در داخل دایره محیطی مثلث ABC باشد ، روی محیط دایره محیطی و مقابل یکی از اضلاع مثلث ABC باشد ، خارج دایره محیطی و مقابل یکی از زوایای مثلث ABC باشد ، و بالاخره روی محیط مثلث ABC باشد .

۲) در حالت خاصی که یکی از عوامل سمت راست تساوی (A) مساوی صفر شود و دیگری مقدار معینی باشد . $tg \frac{x-y}{\gamma} = 0$ و $x=y$ می شود . ولی در حالتی که یکی از عوامل سمت راست تساوی (A) بسمت صفر و دیگری بسمت بی نهایت میل کند ، $tg \frac{x-y}{\gamma}$ مبهم و بصورت $0 \times \infty$ در می آید و مسئله بی نهایت جواب دارد .

در حقیقت اگر :

$$tg\left(180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\gamma}\right) \rightarrow \infty$$

خواهیم داشت :

$$۱۸۰^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = ۹۰^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ \quad \text{و یا :}$$

از اینجا نتیجه می شود که چهارضلعی ABCD محاطی و روی قوس ADC مجموعه بی نهایت نقطه وجود دارد (و نه يك نقطه مشخص) که در شرایط مسئله صدق می کنند .
از تساوی :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \sin \alpha}{c \sin \beta}$$

زاویه کمکی φ را محاسبه می کنیم . برای این منظور آنرا چنین می نویسیم :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{\sin \beta} : \frac{c}{\sin \alpha}$$

و در این حالت داریم :

$$\frac{a}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \alpha} = 2R$$

که در آن ، R عبارتست از شعاع دایره محیطی چهارضلعی ABCD .
بنابراین :

$$\operatorname{tg} \varphi = ۱ \Rightarrow \varphi = ۴۵^\circ$$

و بنابراین عامل اول بسمت صفر میل خواهد کرد یعنی :

$$\operatorname{tg}(\varphi - ۴۵^\circ) = ۰$$

۳) علاوه بر آنچه گفته شد ، حالت های خاص زیاد دیگری هم برای جواب های این مسئله مهم و جالب وجود دارد .

۱۱۲۲. راهنمایی : از روابط حل مسئله ۱۱۲۱ استفاده کنید .

جواب : $AD \approx ۱/۰۳۴ \text{ km}$ ؛ $DC \approx ۲/۰۴۷ \text{ km}$ ؛ $BD \approx ۱/۴۶۵ \text{ km}$

$$۱۱۲۵. \text{ جواب : } a = \frac{d/\sqrt{2}}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - ۴۵^\circ\right)} \approx ۸/۵$$

$$P = 2a \sec^2 \frac{\alpha}{2} : \text{جواب} \quad ۱۱۲۶$$

۱۱۲۷. نصف قطر کوچکتر لوزی را k و شعاع دایره‌های محاطی را طبق فرض R و r می‌گیریم، داریم:

$$R = k \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2k \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= 2k \cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right);$$

$$r = k \tan\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) = k \cot\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)$$

$$\frac{R}{r} = 2 \sin^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) : \text{جواب}$$

$$S = \frac{2ab}{\sin \alpha}, \quad d_1, d_2 = \frac{2}{\sin \alpha} \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab \cos \alpha} : \text{جواب} \quad ۱۱۲۸$$

$$R = ۱۰۵/۱۵ \text{ kg} : \text{جواب} \quad ۱۱۲۹$$

$$d \neq ۱۳/۵^m : \text{جواب} \quad ۱۱۳۰$$

$$\alpha \neq ۳۹^\circ ۵۹/۵' : \text{جواب} \quad ۱۱۳۱$$

۱۱۳۲. طبق قانون فیزیکی نور داریم:

$$I = \frac{k \sin \alpha}{l^2}$$

که در آن k ضریب نسبت است (شکل ۶۶). از مثلث قائم الزاویه AOB بدست می‌آید:

$$l = \frac{r}{\cos \alpha}; \quad I = \frac{k \sin \alpha \cos^2 \alpha}{r^2};$$

$$\left(\frac{Ir^2}{2k}\right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4} = (1 - \cos^2 \alpha) \frac{\cos^2 \alpha}{2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{2};$$

از آنجا که مجموع این سه عامل ثابت و برابر واحد است:

$$(1 - \cos^2 \alpha) + \frac{\cos^2 \alpha}{2} + \frac{\cos^2 \alpha}{2} = 1$$

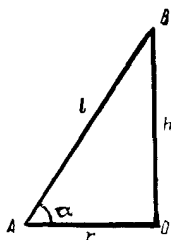
در این صورت نور بهتر (ماکزیم نور) به نقطه A وقتی می‌تابد که داشته باشیم:

$$1 - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{2}$$

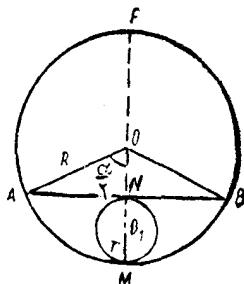
$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{و از آنجا:}$$

و ارتفاع مجهول چنین می‌شود:

$$h = r \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$



شکل ۶۶



شکل ۶۷

۱۱۳۳. شعاع بزرگترین دایره محاطی را r و $\widehat{AOB} = \alpha$ فرض می‌کنیم

(شکل ۶۷)

داریم:

$$AN^2 = MN \cdot NE$$

(۱)

که در آن:

$$AN = \pi r ; MN = 2r ; R = \frac{\pi r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$NE = 2R - 2r = 2r \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\alpha}{2}} - 1 \right)$$

بجای AN ، MN و NE مقادیرشان را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم،

میشود:

$$\pi^2 r^2 = r^2 \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\alpha}{2}} - 1 \right)$$

واز آنجا :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{2 + \pi^2}$$

وبنا براین :

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{2\pi}{2 + \pi^2}$$

جواب : $\alpha \approx 129^\circ 56'$

۲۰۵. حل مسائل هندسه فضائی به کمک مثلثات

۱۱۳۴. فرض می‌کنیم $AD = x$ ، $DC = y$ ، $DD_1 = z$ ، $B_1D_1 = d$ (شکل ۶۸).

داریم :

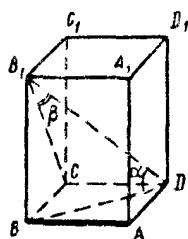
$$2(y + A_1D) = m ; \quad (1)$$

$$y = d \sin \beta ; \quad (2)$$

$$A_1D = d \cos \beta ; \quad (3)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) بدست می‌آید :

$$d = \frac{m}{2\sqrt{2} \cos(\beta - 45^\circ)}$$



شکل ۶۸

وعلاوه بر آن :

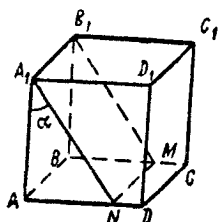
$$x = A_1D \cos \alpha = d \cos \alpha \cos \beta ;$$

$$z = A_1D \sin \alpha = d \sin \alpha \cos \beta ;$$

و با در دست داشتن x و y و z می‌توان حجم مکعب مستطیل را بدست آورد.

$$V = \frac{\sqrt{r} m^{\frac{1}{2}} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cos \beta}{128 \cos^2 (\beta - 45^\circ)} \quad \text{جواب :}$$

۱۱۳۵. ضلع مکعب را x و پاره خطهای $A_1N = y$ و $AN = z$ می گیریم (شکل ۶۹). بدست می آید :



شکل ۶۹

$$x \cdot y = m ;$$

$$x = y \cos \alpha ; z = y \sin \alpha$$

واز آنجا :

$$x = \sqrt{m \cos \alpha} ;$$

$$y = \sqrt{\frac{m}{\cos \alpha}} ;$$

$$z = \sin \alpha \sqrt{\frac{m}{\cos \alpha}} ;$$

صفحه A_1B_1MN مکعب را به دو قسمت تقسیم می کند که یکی از آنها منشور مثلث القاعده و دیگری منشوری باقاعده های چهارضلعی است .
حجم منشور مثلث القاعده :

$$V_1 = \frac{x^2 z}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha \sqrt{m^3 \cos \alpha}$$

و حجم منشور دوم :

$$V_2 = x^3 - V_1$$

$$V_1 = \frac{\sin \alpha}{2} \sqrt{m^3 \cos \alpha} ;$$

جواب :

$$V_2 = \frac{2 \cos \alpha - \sin \alpha}{2} \sqrt{m^3 \cos \alpha}$$

۱۱۳۶. بادرست داشتن جوابهای مسئله قبل می توان V_2 را بر V_1 تقسیم کرد. ولی می توان بطریق دیگری هم این نسبت را بدست آورد . چون ارتفاع دو منشور باهم برابر است داریم :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_{B_1C_1CM}}{S_{BB_1M}} = \frac{(B_1C_1 + MC)c_1c}{B_1B \cdot BM} =$$

$$= \frac{[x + (x - z)]x}{xz} = 2\frac{x}{z} - 1$$

جواب : $\frac{V_2}{V_1} = 2\cot\alpha - 1$ (که در آن $\cot\alpha = \frac{x}{z}$ است) .

۱۱۳۷. از مثلث BB_1D (شکل ۷۰) می‌توان قطر قاعده را بدست آورد :

$$BD = h\cot\alpha$$

و قطر مکعب مستطیل :

$$B_1D = \frac{h}{\sin\alpha}$$

از مثلث DB_1C ضلع قاعده یعنی DC بدست می‌آید و از مثلث BDC ضلع BC از قاعده :

$$DC = B_1D\sin\beta = \frac{h\sin\beta}{\sin\alpha} ;$$

$$BC = \sqrt{BD^2 - DC^2} = \frac{h}{\sin\alpha} \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} =$$

$$= \frac{h\sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(\beta - \alpha)}}{\sin\alpha}$$

و دیگر حجم مکعب مستطیل بدست می‌آید :

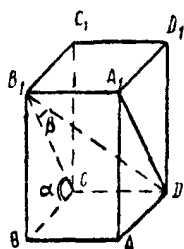
جواب : $V = \frac{h^3\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(\beta - \alpha)}}{\sin^3\alpha}$

۱۱۳۸. $V = 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$

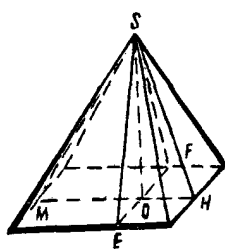
۱۱۳۹. زوایای مجهول را چنین فرض می‌کنیم :

$$\varphi ; 2\varphi ; 4\varphi$$

از رأس هرم دو صفحه ESF و MSN را عمود بر صفحه قاعده رسم می‌کنیم و بنابراین $SO = h$ برابر با ارتفاع هرم می‌شود (شکل ۷۱).



شکل ۷۰



شکل ۷۱

مثلث ESF متساوی الساقین است، زیرا ارتفاع h در نقطه O قاعده EF را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. داریم:

$$\cotg \varphi = \frac{OM}{h} ; \quad (۱)$$

$$\cotg ۲\varphi = \frac{a}{۲h} ; \quad (۲)$$

$$\cotg ۴\varphi = \frac{ON}{h} ; \quad (۳)$$

$$NO + OM = a \quad (۴)$$

از روابط (۱)، (۳) و (۴) بدست می‌آید:

$$\cotg \varphi + \cotg ۴\varphi = \frac{OM + ON}{h} = \frac{a}{k}$$

که با در نظر گرفتن رابطه (۲) می‌شود:

$$\cotg \varphi + \cotg ۴\varphi = ۲ \cotg ۲\varphi ;$$

$$\cotg \varphi - \cotg ۲\varphi = \cotg ۲\varphi - \cotg ۴\varphi ; \quad \text{و یا}$$

$$\frac{\sin(۲\varphi - \varphi)}{\sin \varphi \sin ۲\varphi} = \frac{\sin(۴\varphi - ۲\varphi)}{\sin ۲\varphi \sin ۴\varphi} ; \quad \text{یعنی}$$

$$\sin 2\varphi = \sin 4\varphi = 2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi ;$$

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$$

جواب : $\varphi = 30^\circ$.

۱۱۴۰. ضلع قاعده منشور را a و ساق مثلث مقطع را x می گیریم ،
در این صورت داریم :

$$2x + a = 6a \Rightarrow x = \frac{5a}{2}$$

و ارتفاع قاعده منشور :

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot a$$

و ارتفاع مثلث مقطع :

$$H = \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{\frac{5}{6}}$$

زاویه بین صفحه قاعده و صفحه مقطع از نسبت زیر بدست می آید :

$$\cos \varphi = \frac{h}{H} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{h}{H} ;$$

$$\varphi \neq 69^\circ 17' 43''$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{شعاع دایره محیط بر قاعده :}$$

$$r = \frac{S_{\Delta}}{p} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \quad \text{شعاع دایره محاطی مقطع :}$$

و نسبت شعاعهای این دو دایره :

$$\frac{r}{R} = \frac{a\sqrt{6}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{جواب :}$$

۱۱۴۱. ضلع قاعده منشور را x می گیریم ، در این صورت ارتفاع مثلث قاعده

$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ و مساحت آن $Q = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ می شود . اگر قاعده (مثلث

(ABC) را بعنوان تصویر مقطع S در نظر بگیریم ، خواهیم داشت :

$$\frac{x^2 \sqrt{r}}{r} = S \cdot \cos \beta \Rightarrow x = r \sqrt{\frac{S \cos \beta}{\sqrt{r}}}$$

ارتفاع منشور :

$$H = h \tan \beta = \frac{x \sqrt{r}}{r} \tan \beta$$

و حجم منشور :

$$V = Q \cdot H = \frac{r}{\lambda} x^2 \tan \beta.$$

وسط کل منشور :

$$S_1 = r x \cdot H + 2Q$$

$$V = \sin \beta \sqrt{\sqrt{r} S^2 \cos \beta} \quad \text{جواب :}$$

$$S_1 = \frac{r S \cos \beta \sin(\varphi + \beta)}{\cos \varphi \cos \beta}$$

که در آن $\varphi = \arctg \frac{1}{r}$ است .

۱۱۴۲. فرض می‌کنیم $AB = AC = x$ و $BC = z$ باشد ، داریم :

$$2x + z = 2p$$

$$z = 2x \sin \frac{\alpha}{r}$$

و از آنجا :

$$x = \frac{p}{1 + \sin \frac{\alpha}{r}} = \frac{p}{2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{r} \right)} ; z = \frac{p \sin \frac{\alpha}{r}}{\cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{r} \right)}$$

از مثلث ABC ارتفاع قاعده منشور بدست می‌آید :

$$h = x \cos \frac{\alpha}{r} = \frac{p \cos \frac{\alpha}{r}}{2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{r} \right)}$$

از مثلث AA_1D ارتفاع منشور بدست می آید :

$$H = h \operatorname{tg} \beta = \frac{p \cos \frac{\alpha}{\gamma} \operatorname{tg} \beta}{\gamma \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{\gamma} \right)}$$

و مساحت قاعده منشور :

$$Q = \frac{x^{\gamma} \sin \alpha}{\gamma} = \frac{p^{\gamma} \sin \alpha}{\gamma \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{\gamma} \right)}$$

و حجم منشور به سادگی بدست می آید .

$$V = \frac{p^{\gamma} \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{\gamma} \operatorname{tg} \beta}{\gamma \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{\gamma} \right)} : \text{ جواب}$$

$$S = \frac{\gamma p^{\gamma} \sin(\beta + \varphi) \operatorname{tg} \varphi}{\cos \beta \cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{\gamma}} ; \text{ جواب : } ۱۱۴۳$$

$$\varphi = \arctg \left[\frac{\sin \frac{\alpha}{\gamma}}{\gamma \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{\gamma} \right)} \right] : \text{ که در آن داریم}$$

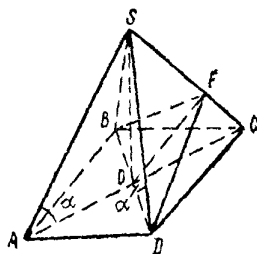
۱۱۴۴ . قطر قاعده هرم $BD = \gamma b \cos \alpha$ می شود ، ارتفاع مقطع $OF = h$ خطی است که وسط دو ضلع از مثلث ASC را بهم وصل کرده است (شکل ۷۲) بنابراین :

$$h = \frac{b}{\gamma}$$

و سطح مقطع :

$$S = \frac{1}{\gamma} BD \cdot h$$

$$S = \frac{1}{\gamma} b^{\gamma} \cos \alpha : \text{ جواب}$$



شکل ۷۲

$$S = \frac{a^2 \cos\left(22^\circ 30' + \frac{\alpha}{4}\right) \cos\left(22^\circ 30' - \frac{\alpha}{4}\right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad : \text{جواب ۱۱۴۵}$$

۱۱۴۶. ضلع قاعده هرم را x و سهم آنرا l می گیریم ، در این صورت داریم :

$$S = x^2 + 2xl$$

ولی :

$$l = \frac{x}{2 \cos \alpha}$$

و بنابراین :

$$S = \frac{2x^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$$

و از آنجا :

$$x = \frac{\sqrt{S \cdot \cos \alpha}}{\sqrt{2 \cos \frac{\alpha}{2}}}$$

و ارتفاع هرم :

$$H = \frac{x}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{S \cdot \cos \alpha}}{2 \sqrt{2 \cos \frac{\alpha}{2}}}$$

و حجم هرم :

$$V = \frac{1}{3} x^2 H$$

$$V = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{6 \cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2 \cos \alpha}{2}} \quad : \text{جواب}$$

۱۱۴۷. قطرهای لوزی را $BD = d$ و $AC = d$ و $SE = l$ می گیریم

(شکل ۷۳) .

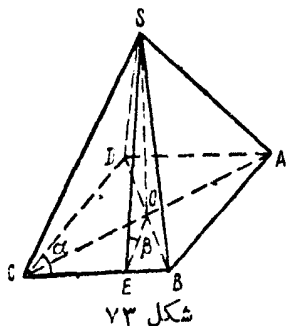
از مثلث قائم الزاویه OCD بدست میآید:

$$OC = \frac{d}{r} \cotg \frac{\alpha}{r};$$

$$d_1 = 2OC = d \cotg \frac{\alpha}{r}$$

سطح قاعده هرم :

$$Q = \frac{1}{r} d d_1 = \frac{1}{r} d^2 \cotg \frac{\alpha}{r}$$



ضلع لوزی و ارتفاع وجه جانبی هرم را محاسبه می کنیم :
از مثلث OCD داریم :

$$DC = \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{r}};$$

و از مثلث EOC :

$$OE = OC \cdot \sin \frac{\alpha}{r} = \frac{d}{r} \cos \frac{\alpha}{r}$$

بنابراین از مثلث OSE خواهیم داشت :

$$l = \frac{OE}{\cos \beta} = \frac{d \cos \frac{\alpha}{r}}{2 \cos \beta}$$

وسط کل هرم چنین است :

$$S = \frac{2DC \cdot l}{r} + Q$$

$$S = \frac{d^2 \cos^2 \frac{\beta}{r} \cotg \frac{\alpha}{r}}{\cos \beta} \quad \text{جواب :}$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{6 \sin \frac{\alpha}{r}}, \quad S = a^2 \cotg \frac{\alpha}{r} \quad \text{جواب : ۱۱۴۸}$$

۱۴۹. سطح قاعده هرم (شکل ۷۳ را ببینید) :

$$Q = a^2 \sin \beta$$

وارتفاع قاعده هرم :

$$h = a \sin \beta$$

وازا آنجا :

$$OE = \frac{h}{2} = \frac{a}{2} \sin \beta$$

ارتفاع هرم :

$$H = OE \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha \sin \beta$$

ارتفاع وجه جانبی :

$$l = \frac{OE}{\cos \alpha} = \frac{a \sin \beta}{2 \cos \alpha}$$

وحجم هرم :

$$V = \frac{1}{3} Q \cdot H = \frac{a^3}{6} \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin^2 \beta$$

وسطح کل هرم :

$$S = \frac{4al}{2} + Q = \frac{2a^2 \sin \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$$

۱۱۵۰. جواب :

$$S = \frac{2a^2 \sin \beta \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \alpha}$$

۱۱۵۱. از شکل ۷۴ روشن است که :

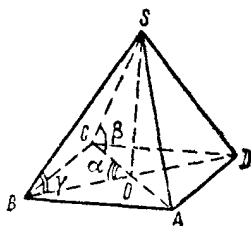
$$OD = h \cdot \cotg \beta ;$$

$$\therefore OC = d_1 = \sqrt{2} h \cotg \beta$$

$$OD = h \cdot \cotg \gamma ;$$

$$\therefore OD = d_2 = \sqrt{2} h \cotg \gamma$$

سطح قاعده هرم :



شکل ۷۴

$$Q = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha = \sqrt{2} h^2 \sin \alpha \cotg \beta \cotg \gamma$$

و حجم مجهول :

$$V = \frac{1}{3} h^3 \sin \alpha \cotg \beta \cotg \gamma$$

۱۱۵۲. باتوجه به شرط مسئله داریم (شکل ۷۲ را به بینید) :

$$OA = a \cos \alpha ;$$

$$d = \sqrt{2} OA = \sqrt{2} a \cos \alpha$$

ارتفاع هرم :

$$H = a \sin \alpha$$

ضلع مربع قاعده :

$$x = \frac{d \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} a \cos \alpha$$

سطح قاعده هرم :

$$Q = \sqrt{2} a^2 \cos^2 \alpha$$

و سهم آن :

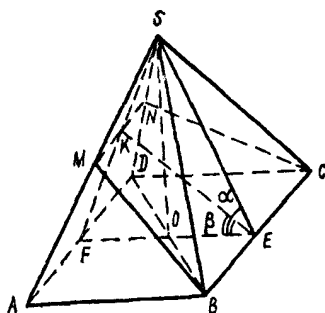
$$l = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = a \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \alpha}{2}}$$

و دیگر سطح جانبی و حجم هرم به سادگی بدست می آید .

$$S = \sqrt{2} a^2 \cos \alpha \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \quad \text{جواب :}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 \sin 2\alpha \cos \alpha$$

۱۱۵۳. مقطع، يك دوزنقه متساوی الساقین است. از مثلث OSF بدست می آید (شکل ۷۵):



شکل ۷۵

$$OE = a \cos \alpha$$

بنابراین ضلع قاعده هرم وقاعده بزرگتر

دوزنقه BMNC چنین است:

$$b = 2OE = 2a \cos \alpha$$

در مثلث ESK طبق قضیه سینوسها

داریم:

$$\frac{KE}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{SK}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$$

و از آنجا ارتفاع دوزنقه بدست می آید:

$$KE = \frac{a \sin 2\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

و از آنجا:

$$KS = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

بالاخره از تشابه دومتثلث ASD و MSN بدست می آید:

$$\frac{MN}{b} = \frac{KS}{a};$$

در نتیجه قاعده کوچکتر دوزنقه چنین می شود:

$$MN = \frac{b \cdot KS}{a} = \frac{2a \cos \alpha \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

و سطح مقطع مورد نظر:

$$S = \left[a \cos \alpha + \frac{a \cos \alpha \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right] \frac{a \sin 2\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{a^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]}{\sin^2(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{a^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \times 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} = \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

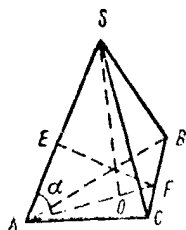
$$S = \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \quad \text{جواب :}$$

۱۱۵۴. از مثلث قائم الزاویه AEF ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع ABC بدست می آید (شکل ۷۶) :

$$h = \frac{EF}{\sin \alpha} = \frac{k}{\sin \alpha}$$

ضلع قاعده هرم (که مثلث متساوی الاضلاع است) :

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2k}{\sqrt{3} \sin \alpha}$$



شکل ۷۶

وسط قاعده هرم :

$$Q = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} k^2}{3 \sin^2 \alpha}$$

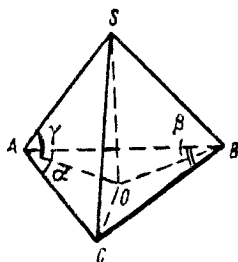
ارتفاع هرم :

$$OS = OA \tan \alpha = \frac{2k}{3 \cos \alpha}$$

که در آن $OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$ شعاع دایره محیطی مثلث ABC است .

$$V = \frac{4 \sqrt{3} k^2}{27 \sin \alpha \sin^2 \alpha} \quad \text{جواب :}$$

۱۱۵۵. از تساوی مثلثهای قائم الزاویه OAS ، OBS ، OCS (شکل ۷۷)



شکل ۷۷

نتیجه می شود که O مرکز دایره محیطی هرم است :

$$OA = OB = OC = R$$

$$R = h \cot \gamma \quad \text{که در آن :}$$

با توجه به قضیه سینوسها در مثلث ABC داریم :

$$AC = 2R \sin \beta$$

$$BC = 2R \sin \alpha$$

سطح قاعده هرم :

$$Q = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin(\alpha + \beta) = 2h^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \cot^2 \gamma$$

و حجم هرم به سادگی بدست می آید .

$$V = \frac{1}{3} h^3 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \cot^2 \gamma \quad \text{جواب :}$$

$$S = \frac{\sqrt{3} b^2}{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha} \quad \text{۱۱۵۶. جواب :}$$

$$V = \frac{1}{3} R^3 \sin^3 \gamma \tan \gamma \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \quad \text{۱۱۵۷. جواب :}$$

$$V = \frac{1}{6} b^3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cos \beta \quad \text{۱۱۵۸. جواب :}$$

۱۱۵۹. سطح قاعده هرم :

$$Q = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha$$

از فرض مسئله نتیجه میشود که H ، ارتفاع هرم ، از مرکز دایره محیطی قاعده (باشماع R) عبور می کند. طبق قضیه سینوسها از مثلث ABC داریم :

$$\frac{b}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = 2R \Rightarrow R = \frac{b}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} ;$$

$$H = R \cotg \beta = \frac{b \cotg \beta}{\sqrt{\cos \frac{\alpha}{2}}}$$

و حجم هرم از رابطهٔ مربوطه بدست می آید .

$$V = \frac{1}{6} b^3 \sin \frac{\alpha}{2} \cotg \beta \quad \text{جواب :}$$

۱۱۶۰ . چون یالهای جانبی باصفحهٔ قاعده زوایای مساوی می سازند دارای

تصاویر مساوی هستند (شکل ۷۸) . یعنی : $OA = OB = OC = R$ (شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است) .

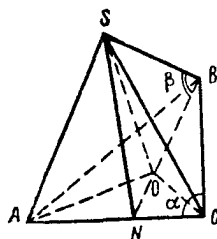
از مثلث ABC با توجه به قضیهٔ سینوسها بدست می آید :

$$R = \frac{b}{\sqrt{\sin \alpha}}$$

و سطح مثلث NSB :

$$S = \frac{1}{2} NB \cdot OS$$

از مثلث OSB بدست می آید :



شکل ۷۸

$$OS = R \tg \beta = \frac{b \tg \beta}{\sqrt{\sin \alpha}}$$

مثلث AOB متساوی الساقین است و بنابراین :

$$\widehat{ABO} = \widehat{BAO} = 90^\circ - \alpha ;$$

$$\begin{aligned} \widehat{ANB} &= 180^\circ - (\widehat{NAB} + \widehat{ABN}) = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - \\ &\quad - (90^\circ - \alpha) = 3\alpha - 90^\circ \end{aligned}$$

$$\widehat{CNB} = 180^\circ - (3\alpha - 90^\circ) = 270^\circ - 3\alpha$$

طبق قضیهٔ سینوسها و در مثلث BNC داریم :

$$\frac{NB}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin (270^\circ - 3\alpha)}$$

$$NB = \frac{BC \sin \alpha}{-\cos^2 \alpha} = -\frac{2b \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{یا:}$$

که در آن $BC = 2b \cos \alpha$ است.

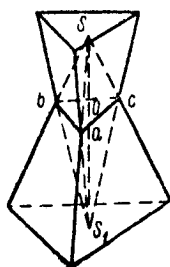
$$S_{\Delta} = -\frac{b^2 \cos \alpha \tan \beta}{2 \cos^2 \alpha} \quad (\cos^2 \alpha < 0) \quad \text{جواب:}$$

۱۱۶۱. با توجه به شکل ۷۹ روشن می شود که حجم مطلوب:

$$V = \frac{1}{3} Q \cdot H$$

که در آن Q ، سطح مثلث abc و H ارتفاع مشترک دوهرم است.

اگر شعاع دایره محیطی مثلث abc را R بگیریم، بدست می آید:



شکل ۷۹

$$OS = R \cot \alpha;$$

$$OS_1 = R \cot \beta;$$

$$H = OS + OS_1$$

$$H = \frac{R \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \quad \text{یعنی:}$$

$$H = l \cos \alpha \quad \text{از طرف دیگر:}$$

و بنابراین:

$$l \cos \alpha = \frac{R \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$R = \frac{l \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{و از آنجا:}$$

مساحت مثلث متساوی الاضلاع abc .

$$Q = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4}$$

و حجم مورد نظر:

$$V = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$V = \frac{\sqrt{3} l^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{16 \sin^2 (\alpha + \beta)} \quad \text{جواب :}$$

$$H = d \sin \alpha ; \quad \text{داریم : ۱۱۶۲}$$

$$2\pi R = d \cos \alpha ;$$

$$R = \frac{d \cos \alpha}{2\pi} \quad \text{واز آنجا :}$$

و دیگر حجم استوانه بدست می آید .

$$V = \frac{d^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{8\pi} \quad \text{جواب :}$$

$$V = \frac{\pi h^3 \operatorname{tg} \alpha \cotg \frac{\beta}{2}}{8 \sin^2 \frac{\beta}{2}} \quad \text{جواب : ۱۱۶۳}$$

$$\varphi = 2\pi \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{جواب : ۱۱۶۴}$$

۱۱۶۵ . شمع قاعده مخروط را r ، طول مولد را l و ارتفاع مخروط را h می گیریم . بدست می آید :

$$r = l \cos \alpha ; h = r \operatorname{tg} \alpha$$

و سطح کل مخروط :

$$S = \pi r^2 \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

و از اینجا سطح قاعده مخروط ، شمع و ارتفاع آن بدست می آید :

$$\pi r^2 = \frac{S \cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} ;$$

$$r = \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S \cos \alpha}{2\pi}} ;$$

$$h = \frac{\frac{\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S \cos \alpha}{2\pi}}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

و بنابراین حجم مخروط چنین می شود :

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{S \cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S \cos \alpha}{2\pi}}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$V = \frac{\frac{\alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2 \cos \alpha}{2\pi}}}{\cos \frac{\alpha}{2}} : \text{ جواب}$$

۱۱۶۶. طول قوس قطاع برابر است با محیط دایره قاعده مخروط :

$$\frac{\pi l \alpha}{180} = 2\pi r$$

ولی برای مولد مخروط داریم :

$$l = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

و بنابراین :

$$r = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha}{360}$$

با درست داشتن l و r ارتفاع مخروط بدست می آید :

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

و دیگر به سادگی حجم مخروط محاسبه می شود .

۱۱۶۷. قطر AB عمود بر CD (فصل مشترك صفحه Q با صفحه قاعده مخروط)

را رسم می کنیم ، طبق شرط مسئله داریم :

$$\widehat{AKS} = \beta ; \widehat{CSD} = \alpha$$

ارتفاع مخروط را H می‌گیریم ، داریم :

$$H = SK \cdot \sin \beta$$

علاوه بر آن :

$$Q = SK \cdot CK = (SK)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

که در آن از مثلث CKS داریم :

$$CK = SK \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

و از آنجا :

$$SK = \sqrt{Q \cotg \frac{\alpha}{2}}$$

$$H = \sqrt{Q \cotg \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \beta \quad \text{جواب :}$$

۱۱۶۸. مقطع مخروط ناقص باصفحه‌ای که از مراکز دو قاعده آن می‌گذرد

دو نقطه متساوی الساقین $ABCD$ است . از نقطه B عمود $BE = H$ ،

بر AD فرود می‌آوریم ، در این صورت :

$$H = (R - r) \operatorname{tg} \alpha ;$$

$$l = AB = \frac{R - r}{\cos \alpha}$$

سطح جانبی مخروط ناقص :

$$S = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\cos \alpha}$$

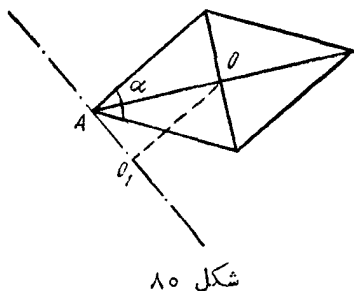
و حجم مخروط ناقص :

$$V = \frac{\pi}{3} (R^2 - r^2) \operatorname{tg} \alpha$$

$$V = \frac{\pi}{6} l^3 \sin 2\alpha \cos \alpha \quad \text{جواب :} \quad ۱۱۶۹$$

۱۱۷۰. راه حل اول. سطح جسمی که در اثر دوران بدست می آید تشکیل شده است از سطح جانبی مخروط

ناقص (شعاعهای: $r = a$ ، $R = a + x$ و مولد $l = a$)، حلقه‌ای که سطح آن برابر است با $\pi(R^2 - x^2)$ ، سطح دایره πr^2 و سطح جانبی مخروط $\pi x a$ (که در آن:

$$R = 2a \cos \frac{\alpha}{2}, \quad x = a \cos \alpha$$


شکل ۸۰

$$\begin{aligned} S &= \pi(R+r)a + \pi(R^2 - x^2) + \pi r^2 + \pi ax = \\ &= \pi(2a+x)a + \pi[(a+x)^2 - x^2] + \pi a^2 + \pi ax = \\ &= 4\pi a(a+x) = 4\pi a^2(1 + \cos \alpha). \end{aligned}$$

$$S = 8\pi a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

راه حل دوم. مرکز ثقل لوزی بر محل تلاقی اقطار آن قرار دارد. طول راهی که مرکز ثقل لوزی، یعنی O، دور محور دوران AO_۱ طی می کند (شکل ۸۰) برابر است:

$$2\pi OO_1 = 2\pi AO \cos \frac{\alpha}{2} = 2\pi a \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

که در آن $AO = a \cos \frac{\alpha}{2}$ است.

بنابراین قضیه اول گولدن (مسئله ۸۲۸ را به بینید) سطح جسم دوار چنین است:

$$S = 2a \times 2\pi a \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$S = 8\pi a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{جواب:}$$

۱۱۷۱. راهنمایی : طبق قضیهٔ دوم گولدن (مسئلهٔ ۸۲۸) حجم جسم دوار چنین است :

$$V = a^2 \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \pi a \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \pi a^3 \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}$$

که در آن $a^2 \sin \alpha$ سطح لوزی است .
و سطح جسم دوار (طبق مسئلهٔ ۱۱۷۰) :

$$S = \frac{1}{2} \pi a^2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

جواب : $V = ۶۹۸۴/۹ \text{ m}^3$; $S = ۲۸۶۱/۷ \text{ m}^2$

۱۱۷۲. جواب : ; $V = \frac{\pi d^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

$$S = \frac{\frac{1}{2} \pi d^2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

۱۱۷۳. جواب : ; $S = \frac{\frac{1}{2} \pi d^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$

$$S = \frac{\frac{1}{2} \pi d^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin(\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

۱۱۷۴. مرکز ثقل متوازی‌الاضلاع ABCD بر نقطهٔ O محل تلاقی اقطار آن واقع است (شکل ۸۱) . طول راهی که مرکز ثقل متوازی‌الاضلاع ضمن دوران دور محور AO_۱ طی می‌کند برابر است با :

$$\frac{1}{2} \pi \cdot OO_1 = \frac{\frac{1}{2} \pi ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} ;$$

زیرا :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{OO_1 \cdot BD}{2} =$$

$$= \frac{OO_1 \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{2}$$

واز آنجا :

$$OO_1 = \frac{ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}$$

سطح جسم دوار طبق قضیه اول گولدن

چنین می شود :

$$S = 2(a+b) \times$$

$$\times \frac{2\pi ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} =$$

$$= \frac{2\pi(a+b)ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}$$

و حجم جسم دوار :

$$V = ab \sin \alpha \cdot \frac{2\pi ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} = \frac{2\pi a^2 b^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}$$

که در آن $ab \sin \alpha$ برابر با سطح متوازی الاضلاع است .

۱۱۷۵ . حجم جسم دوار مورد نظر برابر با مجموع حجمهای سه جسم است :

استوانه و دو مخروط ، که دارای شعاعهای مساوی r ، برابر با ارتفاع دوزنقه

هستند . ارتفاع استوانه مساوی a ، طول قاعده کوچکتر دوزنقه ، و مجموع

ارتفاعات دو مخروط برابر $(b-a)$ ، تفاضل دو قاعده دوزنقه است یعنی :

$$V = \pi r^2 a + \frac{\pi r^2}{3} (b-a) = \frac{\pi r^2}{3} (2a+b)$$

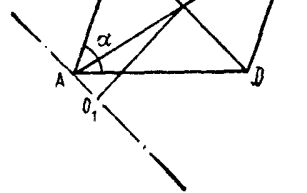
اگر ارتفاع یکی از مخروطها را x و دیگری را y بگیریم ، بدست می آید :

$$x = r \cot \alpha ;$$

$$y = r \cot \beta ;$$

$$b-a = x + y = r(\cot \alpha + \cot \beta)$$

و یا :



شکل ۸۱

$$b - a = r \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \quad \text{یعنی :}$$

$$r = \frac{(b - a) \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{واز آنجا :}$$

$$V = \frac{\pi(2a + b)(b - a)^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{3 \sin^2(\alpha + \beta)} \quad \text{جواب :}$$

$$V = 6013/9 \text{ m}^3 \quad \text{جواب : ۱۱۷۶}$$

$$V = \frac{2}{3} \pi b^2 \sin^2 \alpha \quad \text{جواب : ۱۱۷۷}$$

۱۱۷۸. شعاع قاعده مخروط را R ، ارتفاع آنرا H و مولد آنرا l می گیریم.
از مثلث OBC بدست می آید :

$$R = l \sin \frac{\alpha}{2} ; \quad H = l \cos \frac{\alpha}{2}$$

از رابطه حجم کل مخروط مقدار l بدست می آید . چون داریم :

$$\begin{aligned} S &= \pi R(l + R) = \pi l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 2\pi l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) ; \end{aligned}$$

خواهیم داشت :

$$l = \frac{1}{\cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} \sqrt{\frac{S}{2\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

اگر شعاع کره مجهول را r بگیریم ، با توجه به اینکه حجم کره با حجم مخروط برابر است ، داریم :

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$4r^3 = R^2 H = b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{یا :}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{واز آنجا :}$$

$$r = \frac{1}{2 \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{S^2 \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \pi^2}} \quad \text{جواب :}$$

۱۱۷۹. سطح مثلث ABC (شکل ۸۲) :

$$Q = \frac{1}{2} AB \cdot CD \quad (۱)$$

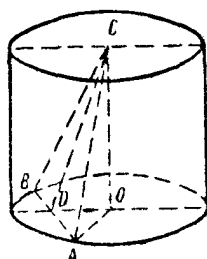
واز مثلث ACD بدست می‌آید :

$$AD = \frac{AB}{2} ; \quad CD = \frac{AD}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$Q = \frac{AD^2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad \text{و بنابراین :}$$

$$AD = \sqrt{Q \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad \text{واز آنجا :}$$

از مثلثهای AOD و ACD بدست می‌آید :



شکل ۸۲

$$AO = \frac{AD}{\sin \frac{180^\circ}{n}} = \frac{\sqrt{Q \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{\sin \frac{180^\circ}{n}} ;$$

$$AC = \frac{AD}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{Q \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

واز مثلث AOC :

$$OC = \sqrt{AC^2 - AO^2}$$

یعنی :

$$OC = \frac{1}{\frac{\sin \frac{\alpha}{r} \sin \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{\alpha}{r}}} \sqrt{Otg \frac{\alpha}{r} \left(\sin^2 \frac{180^\circ}{n} - \sin^2 \frac{\alpha}{r} \right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin \frac{\alpha}{r} \sin \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{\alpha}{r}}} \sqrt{Otg \frac{\alpha}{r} \sin \left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{\alpha}{r} \right) \sin \left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{\alpha}{r} \right)}$$

$$S = \frac{2\pi Q}{\frac{\sin \frac{\alpha}{r} \sin \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{\alpha}{r}}} \times$$

جواب :

$$\times \sqrt{\sin \left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{\alpha}{r} \right) \sin \left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{\alpha}{r} \right)} ;$$

$$V = \frac{\pi Q}{\frac{\cos \frac{\alpha}{r} \sin \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{\alpha}{r}}} \times$$

$$\times \sqrt{Otg \frac{\alpha}{r} \sin \left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{\alpha}{r} \right) \sin \left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{\alpha}{r} \right)}$$

۱۱۸۰. سطح قاعده هرم را Q ، ارتفاع آنرا H ، مولد مخروط را l و شعاع قاعده مخروط را R می گیریم ، دراینصورت :

$$H = l \sin \alpha ; R = l \cos \alpha$$

از رابطه $S = \pi R(l + R)$ مقدار l را محاسبه می کنیم :

$$\pi l^2 \cos \alpha (1 + \cos \alpha) = S ;$$

$$2\pi l^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{r} = S \quad \text{یا :}$$

$$l = \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{r}} \sqrt{\frac{S}{2\pi \cos \alpha}}$$

از آنجا :

بنابراین :

$$H = \frac{tg \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S \cos \alpha}{2\pi}}$$

مساحت قاعده هرم :

$$Q = \frac{\pi}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{n S \cos \alpha \sin \frac{360^\circ}{n}}{4\pi \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

و دیگر حجم هرم بدست می آید .

جواب :

$$V = \frac{\pi \sin \alpha \sin \frac{360^\circ}{n}}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2 \cos \alpha}{2\pi^2}}$$

$$V = 6657/5 \quad \text{جواب : ۱۱۸۱}$$

$$\text{جواب : ۱۱۸۳}$$

$$V = \frac{2l^2 \sin^2 \beta \cotg \alpha}{3 \sin \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}$$

۱۱۸۴ . شعاع کره محاطی را R و زاویه ASO را x می گیریم .
طبق فرض مسئله تساوی زیر را داریم :

$$\frac{1}{3} \pi NO_1^2 \cdot O_1S - \pi \cdot O_1E^2 \left(R - \frac{O_1E}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^2 \quad (۱)$$

ولی داریم :

$$NO_1 = R \cos x ; \quad (۲)$$

$$O_1S = NO_1 \cdot \cotg x = \frac{R \cos^2 x}{\sin x} ; \quad (۳)$$

$$O_1E = R - OO_1 = R(1 - \sin x) \quad (۴)$$

اگر در تساوی (۱) بجای O_1S ، NO_1 و O_1E مقادیرشان را از روابط (۲)، (۳) و (۴) قرار دهیم، بدست می آید:

$$\frac{\cos^2 X}{\sin X} - (1 - \sin X)^2 (2 + \sin X) = 4 ;$$

یا:

$$(1 - \sin X)^2 [(1 + \sin X)^2 - (2 + \sin X) \sin X] = 4 \sin X$$

یعنی:

$$\sin^2 X - 6 \sin X + 1 = 0$$

و از آنجا:

$$\sin X = 3 - 2\sqrt{2} \neq 0, 1, 2, \dots$$

جواب: $X \neq 90^\circ$

۱۱۸۵. اگر شعاع قاعده مخروط را R ، ارتفاع آن را H و ارتفاع مثلث مقطع را h بگیریم، داریم:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} ; h = \frac{a}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} ;$$

$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

و بنابراین حجم مخروط چنین می شود:

$$V = \frac{\pi a^2 \sqrt{\cos \alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

جواب: $V \neq 76 \text{ dm}^3$

۱۱۸۶. بادر دست داشتن حجم کره، شعاع آن بسادگی بدست می آید:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

بسادگی ثابت می شود که ارتفاع مخروط $OS = H$ از مرکز کره محاطی

می‌گذرد. از نقطه O' مرکز کره، به انتهای A از مولد AS وصل می‌کنیم،
 مثلث قائم‌الزاویه $O'OA$ بدست می‌آید که در آن وتر $OO' = r$ و $OA = R$ و
 $\angle OAO' = \frac{\alpha}{2}$ است. از آنجا شعاع قاعده مخروط بدست می‌آید:

$$R = r \cotg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3V}{4\pi}} \cdot \cotg \frac{\alpha}{2}$$

از مثلث قائم‌الزاویه OSA ، ارتفاع مخروط بدست می‌آید:

$$H = R \tg \alpha$$

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 \tg \alpha \quad \text{و حجم مخروط:}$$

$$V = \frac{1}{4} V \tg \alpha \cotg^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{جواب:}$$

۱۱۸۷. مقطع مخروط را روی صفحه‌ای که از ارتفاع آن می‌گذرد در نظر
 می‌گیریم (شکل ۸۳): مولد آنرا l و شعاع قاعده مخروط را $R = OB$ و
 شعاع کره محاطی را $r = O_1N$ فرض می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\pi R^2 = S \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

از مثلث BO_1O داریم:

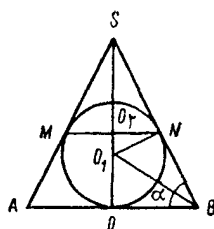
$$r = R \tg \frac{\alpha}{2}$$

و از مثلث BOS :

$$l = \frac{R}{\cos \alpha}$$

مولد مخروط بدست آمده:

$$SN = l - R = \frac{2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$$



شکل ۸۳

و ارتفاع این مخروط :

$$SO_r = SN \sin \alpha = r R \sin \frac{\alpha}{2}$$

و شعاع قاعده آن :

$$O_r N = SN \cdot \cos \alpha = r R \sin \frac{\alpha}{2}$$

و حجم مورد نظر :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot r R \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{S^2}{\pi}} \cdot r R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{جواب :}$$

۱۱۹۵. در شکل ۴۶ مقطع مخروط و کره محاط در آن (بشعاع r) روی صفحه‌ای که از ارتفاع مخروط می‌گذرد نشان داده شده است. $\widehat{ASB} = 2\alpha$ ، ارتفاع آب مخروط را قبل از انداختن کره H و بعد از انداختن کره h می‌گیریم. داریم :

$$\begin{aligned} H = DS = r + OS = r + \frac{r}{\sin \alpha} &= \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{2r \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha} \quad (1) \end{aligned}$$

برای محاسبه ارتفاع h آب، حجم آبی را که در مخروط ریخته‌ایم محاسبه می‌کنیم :

$$\begin{aligned} V = V_M - V_K &= \frac{1}{3} \pi AD^2 \cdot H - \frac{4}{3} \pi r^3 = \\ &= \frac{1}{3} \pi (H^2 r \sin^2 \alpha - 4r^3) \end{aligned}$$

(V_M یعنی حجم مخروط و V_K یعنی حجم کره).

که در آن داریم :

$$AD = H \operatorname{tg} \alpha ; V_M = \frac{1}{3} \pi H^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (3)$$

از روابط (۱) و (۲) بدست می آید :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \left[\frac{2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} - 1 \right] \quad (4)$$

این حجم آب پس از انداختن کره هم، به شکل مخروط است و بنابراین مخروط بدست آمده متشابه با مخروط اول خواهد بود. ولی حجم مخروطهای متشابه بر نسبت مکعب ارتفاعات آنهاست، بنابراین :

$$V : V_M = h^3 : H^3$$

و از آنجا :

$$h = \frac{H \sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{V_M}}$$

که اگر بجای H ، V_M و V از روابط (۱)، (۳) و (۴) مقادیرشان را قرار دهیم، مجهول بدست می آید :

$$H = \frac{2r \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha} ; \text{ جواب :}$$

$$h = r \sqrt[3]{\frac{4}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \left[\frac{2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} - 1 \right]}$$

۱۱۹۱. شمع کره محیطی $O, B = R$ می گیریم (شکل ۸۴). طبق شرط مسئله داریم :

$$\pi R^2 = Q \Rightarrow R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$$

از مثلث ABC و با استفاده از قضیه سینوسها، شمع مخروط بدست می آید :

$$R_1 = \frac{AB}{2} = R \sin \alpha$$

از مثلث O_1AD شعاع کره محاطی بدست می آید :

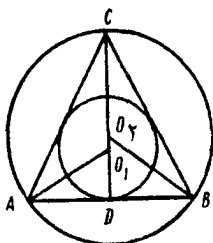
$$r = R_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

و ارتفاع مخروط :

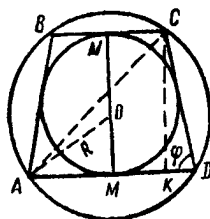
$$H = R \operatorname{tg} \alpha = 2R \sin^2 \alpha$$

حجم مخروط محاطی :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{Q^3}{\pi}} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$



شکل ۱۴



شکل ۱۵

و حجم مخروط محیطی :

$$V_1 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}$$

و حجم مخروط :

$$V_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{Q^3}{\pi}} \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha$$

۱۱۹۲. مقطع مخروط ناقص را روی صفحه‌ای که از مراکز دو قاعده آن می‌گذرد در نظر می‌گیریم (شکل ۱۵) و فرض می‌کنیم :

$$\widehat{CDK} = \varphi \text{ و } CK = h, CD = l, BC = b, AD = a$$

سطح جانبی مخروط ناقص :

$$S_p = \pi \left(\frac{a+b}{2} \right) l$$

که بادر نظر گرفتن خاصیت چهارضلعی محیطی ABCD داریم :

$$a + b = 2l \Rightarrow \frac{a+b}{2} = l$$

$$S_M = \pi l^2 \quad \text{و بنا براین :}$$

سطح کره محاطی :

$$S_M = 4\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \pi h^2$$

طبق شرط مسئله خواهیم داشت :

$$\frac{\pi l^2}{\pi h^2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{l}{h} = \sqrt{\frac{m}{n}}$$

از مثلث KCD بدست می آید :

$$\frac{l}{h} = \operatorname{cosec} \varphi \Rightarrow \operatorname{cosec} \varphi = \sqrt{\frac{m}{n}}$$

و بنا براین زاویه مورد نظر :

$$\varphi = \operatorname{arccosec} \sqrt{\frac{m}{n}}$$

دستگاه زیر را در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = l \cos \varphi (= KD) \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = l \end{cases}$$

که از آن خواهیم داشت :

$$a = l(1 + \cos \varphi) = 2l \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

شعاع R از کره محیطی مخروط ناقص برابر است با شعاع دایره محیطی

ذوزنقه ABCD و بنا براین برابر است با شعاع دایره محیطی ACD ، از

همین مثلث بدست می آید :

$$R = \frac{AC}{2 \sin \varphi}$$

و :

$$AC^2 = a^2 + l^2 - 2al \cos \varphi = 4l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + l^2 -$$

$$- 4l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cos \varphi = 4l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + l^2 - 4l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \times$$

$$\times \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = l^2 + 4l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} =$$

$$= l^2 (1 + \sin^2 \varphi) ;$$

و بنابراین :

$$R = \frac{l \sqrt{1 + \sin^2 \varphi}}{2 \sin \varphi}$$

$$r = \frac{h}{2} = \frac{l}{2} \sin \varphi \quad \text{ولی :}$$

و نسبت مجهول چنین میشود :

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} : \varphi = \operatorname{arccosec} \sqrt{\frac{m}{n}} \quad \text{جواب :}$$

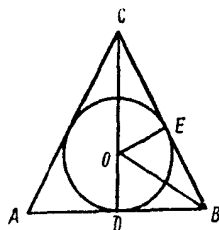
۱۱۹۳. روی مقطع محوری مخروط (شکل ۸۶) فرض می‌کنیم شعاع دایره:

محاطی $OD = r$ ، شعاع قاعده مخروط

$DB = R$ باشد . طبق شرط داریم :

$$\pi r^2 = Q \Rightarrow r = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$$

از مثلثهای DOB و DCB بدست می‌آید :



شکل ۸۶

$$R = r \cotg \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \cotg \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) ;$$

$$l = \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

و سطح کل مخروط :

$$S = \pi R(R + l) = \pi R^2 \left(\frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)$$

جواب : $S = 2Q \cotg^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}$

۱۱۹۴. در مقطع محوری مخروط (شکل ۸۶) داریم : $\hat{A} = \alpha$ و بدست میآید:

$$R = r \cotg \frac{\alpha}{2} ; H = R \tg \alpha = r \tg \alpha \cotg \frac{\alpha}{2} ;$$

$$l = \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{r \cotg \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} ;$$

R : شعاع قاعده مخروط ،

r . شعاع کره ،

l : مولد مخروط ،

H : ارتفاع مخروط .

سطح کل مخروط چنین می شود :

$$S = \pi r^2 \cotg^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

حجم مخروط :

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cotg^2 \frac{\alpha}{2} \tg \alpha$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cotg^2 \frac{\alpha}{2} \tg \alpha \quad , \quad S = \frac{\pi r^2 \cotg^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} : \text{جواب}$$

۱۱۹۵. طبق قضیه سینوسها و از مثلث ABC (شکل ۸۴ را به بینید) داریم :

$$AB = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

شعاع قاعده مخروط :

$$r = \frac{AB}{2} = R \sin \frac{\alpha}{2}$$

ارتفاع مخروط :

$$H = r \tg \alpha = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

و حجم مخروط :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} : \text{جواب}$$

۱۱۹۶. قطر قاعده هرم را $AC=BD=d$ و ارتفاع آنرا $OS=H$ فرض می کنیم (شکل ۸۷). چون هرم قابل محاط در کره است. ارتفاع از نقطه O محل تلاقی اقطار قاعده هرم می گذرد و $SN=2R$ و $NO=2R-H$ می شود. با استفاده از خاصیت وترهای متقاطع خواهیم داشت :

$$OC \cdot OA = OS \cdot NO$$

یا :

$$\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = H(2R - H)$$

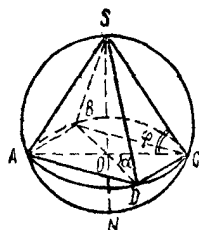
$$d^2 = 4H(2R - H) \quad (1)$$

از مثلث COS بدست می آید :

$$d = 2H \cotg \gamma \quad (2)$$

معادلات (۱) و (۲) را مثل يك دستگاه حل می کنیم ، می شود :

$$H = 2R \sin^2 \varphi ;$$



شکل ۸۷

$$d = 2R \sin^2 \varphi \cot \varphi = 2R \sin^2 \varphi$$

سطح مستطیل (قاعده هرم) :

$$Q = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha = 2R^2 \sin^2 \varphi \sin \alpha$$

و حجم مجهول هرم محاطی ، طبق رابطه مربوطه بدست می آید :

$$V = \frac{1}{3} R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi \sin \alpha$$

۱۱۹۷. در شکل ۸۸ مقطع محوری مخروط و کره های محاط در آن داده شده است ، شعاع کره ها را از پائین به بالا بترتیب $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ فرض می کنیم ، داریم :

$$OO_1 = r_1 + r_2 ;$$

$$O_n = r_1 - r_2$$

از طرف دیگر داریم :

$$\frac{O_n}{OO_1} = \cos \alpha \Rightarrow \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \cos \alpha$$

از آنجا رابطه زیر بدست می آید :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \cot^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$r_1 = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{علاوه بر آن :}$$

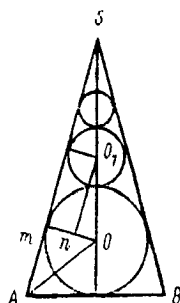
که در آن R عبارتست از شعاع قاعده مخروط ، بنابراین :

$$r_2 = r_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = R \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$$

.....

حجم اولین کره :

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$$



شکل ۸۸

حجم دومین کره :

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

حجم کره سوم :

$$V_3 = \frac{4}{3} \pi R^2 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$$

.....

بسادگی دیده می شود که حجم این کره ها جملات متوالی يك تصاعد هندسی نزولی هستند که قدر نسبت آن از تقسیم هر جمله بر جمله قبل آن بدست می آید ، یعنی :

$$p = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

حد مجموع جملات این تصاعد چنین است :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S = \frac{V_1}{1-p} ;$$

یا :

$$S = \frac{\frac{4}{3} \pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\left(\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \quad S = \frac{2}{3} \pi R^2 \operatorname{tg} 2\theta \quad \text{جواب :}$$

۱۱۹۸. طبق فرض کره ای در منشور محاط شده است ، بنا بر این ارتفاع منشور برابر است با قطر کره . اگر از مرکز کره صفحه ای به موازات قاعده رسم کنیم ، با منشور فصل مشترکی خواهد داشت که مثلث قائم الزاویه ای است با دایره محاطی به شعاع کره محاطی .

اگر مساحت این مثلث قائم الزاویه را S ، محیط آنرا $2p$ و شعاع دایره محاطی آنرا r فرض کنیم ، خواهیم داشت :

$$r = \frac{S}{p} ;$$

و داریم :

$$2p = AC + BC + AB ;$$

$$AC = \frac{h}{\sin \alpha} ;$$

$$BC = \frac{h}{\cos \alpha}$$

$$AB = \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha} ;$$

و بنابراین :

$$\begin{aligned} p &= \frac{h}{2} \cdot \frac{\cos \alpha + \sin \alpha + 1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{h}{2} \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha} = \\ &= \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}} ; \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{h^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{h^2}{\sin 2\alpha} ;$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{h \sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}$$

$$V = S \cdot 2r = \frac{h^2 \sqrt{2}}{2 \sin 2\alpha \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)} \quad \text{جواب :}$$

۱۱۹۹. سهم هرم را l ، ارتفاع آنرا H و شعاع کره محاطی آنرا r می گیریم ، داریم :

$$l = \frac{a}{r} \cotg \frac{\alpha}{2} ;$$

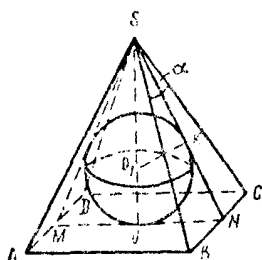
$$H = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{r^2}} = \frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

طبق فرض ، هرم مربع القاعده و منظم است ، بنابراین مرکز کره محاطی بر ارتفاع آن قرار دارد . هرم را با صفحه MSN قطع می کنیم (شکل ۸۹) ، در این صورت دو مثلث OSN و OSK متشابه می شوند و داریم :

$$\frac{SN}{ON} = \frac{OS}{OK} ;$$

یعنی :

$$\frac{l}{\frac{a}{2}} = \frac{H-r}{r} ;$$



شکل ۸۹

بنابراین :

$$r = \frac{aH}{2l+a} = \frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sqrt{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}$$

وسطح مجهول کره چنین می شود :

$$S = \frac{\pi a^2 \cos \alpha}{2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}$$

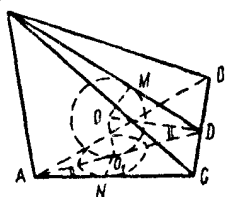
جواب : $S = ۱۶۲ / ۷ \text{ dm}^2$

۱۳۵۵ . شعاع مجهول کره را r فرض می کنیم و از مرکز کره صفحه ای موازی با صفحه قاعده هرم رسم می کنیم تا کره را قطع کند . دایره عظیمه ای از از کره بدست می آید که آنرا روی صفحه قاعده هرم تصویر می کنیم . مرکز این دایره بر نیمساز زاویه BAC واقع است (شکل ۹۰) و همچنین مرکز

کرة محاطی بر نیمساز زاویه ADS واقع است.
از مثلثهای AO_1N و OO_1D بدست می آید :

$$O_1D = r \cotg \frac{\alpha}{2} ;$$

$$AO_1 = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$



شکل ۹۰

مجموع این دو پاره خط برابر است با ارتفاع قاعده هرم :

$$AD = b \cos \frac{\alpha}{2}$$

بنابراین :

$$b \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} + r \cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{2r \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

واز آنجا :

$$r = \frac{b \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$r = b \cos \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\alpha}{2} \quad \text{جواب :}$$

$$R = \frac{b}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tg^2 \alpha} \quad \text{۱۲۰۱. جواب :}$$

۱۰۲۲. از تقاطع وجه DSC با کرة شکل $MSNnM$ بدست می آید (شکل ۹۱)
که به پاره خطهای MS و NS و قوس MnN محدود است و سطح مورد
نظر چهار برابر این سطح است .
ابتدا شعاع قوس MnN را محاسبه می کنیم . از وسط ارتفاع هرم (SK)

عمودی بروجه جانبی DSC فرود می آوریم ، نقطه O_1 بدست می آید که همان مرکز دایره مقطع کره باوجه جانبی خواهد بود .

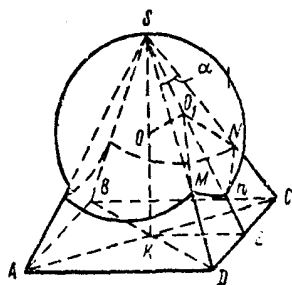
دو مثلث SKE و SOO_1 متشابه اند و

بنابراین :

$$\frac{O_1S}{OS} = \frac{SK}{ES} ;$$

یا :

$$O_1S = \frac{OS \cdot SK}{ES} = \frac{r OS \cdot SK}{r ES} = \frac{SK^2}{r ES}$$



شکل ۹۱

ولی داریم :

$$ES = b \cos \frac{\alpha}{r} ;$$

$$DE = KE = b \sin \frac{\alpha}{r} ;$$

$$SK^2 = SE^2 - KE^2 = b^2 \cos \alpha$$

و بنا براین :

$$r = O_1S = \frac{b \cos \alpha}{r \cos \frac{\alpha}{r}}$$

و سطح قطاع $MO'N$:

$$S_{MO'N} = \frac{\pi r^2 \times 2\alpha}{360} = r^2 \cdot \frac{\pi \alpha}{180}$$

و مساحت دو مثلث متساوی الساقین MO_1S و NO_1S :

$$Q = r^2 \sin(180^\circ - \alpha) = r^2 \sin \alpha$$

و بنا براین مساحت شکل $MSNM$:

$$S = r^2 \sin \alpha + r^2 \cdot \frac{\pi \alpha}{180} = \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\sin \alpha + \frac{\alpha \pi}{180} \right)$$

وسطح مورد نظر : $S_1 = 4S$

جواب : $S_1 = \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\sin \alpha + \frac{\pi \alpha}{180} \right)$

١٢٠٣ . جواب : $S \approx 2/\Delta m^2$; $\alpha = 70^\circ 31' 42,6''$

١٢٠٥ . جواب : $r = b \sqrt{2} \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2}$

١٢٠٦ . جواب : $V_1 : V_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2}{n^2} \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha$

١٢٠٧ . جواب : $R_1 \sqrt{\cotg \frac{\alpha}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2}}$

١٢٠٨ . جواب : $V = \frac{9}{2} \pi a^3$

١٢٠٩ . جواب : $V = \frac{4}{3} \pi R^3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)$

١٢١٠ . جواب : $V = \frac{4}{3} \pi R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

١٢١١ . جواب : $S = 4 \pi R^2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$

١٢١٢ . جواب : $\alpha = \arccos \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$

١٢١٣ . جواب : $V = \frac{4 \pi a^3}{3} \cotg^2 \left(\frac{180^\circ}{\gamma} \right)$

§ ۲۱. مسائل و تمرین‌های مختلف

۱۲۱۸. مساحت مثلثهای ABC ، AOB ، BOC و AOC را بترتیب S ، S_1 ، S_2 و S_3 می‌گیریم (شکل ۹۲)، بدست می‌آید:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{c \cdot t_c}{2} + \frac{a \cdot t_a}{2} + \frac{b \cdot t_b}{2};$$

یعنی:

$$\frac{a \cdot t_a}{2S} + \frac{b \cdot t_b}{2S} + \frac{c \cdot t_c}{2S} = 1 \quad (۱)$$

از طرف دیگر داریم:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

و از آنجا:

$$\frac{a}{2S} = \frac{1}{h_a}; \quad \frac{b}{2S} = \frac{1}{h_b}; \quad \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_c} \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) می‌توان رابطه مورد نظر را ثابت کرد.

۱۲۲۰. اضلاع چهارضلعی را بترتیب a ، b ، c و d می‌گیریم. طبق فرض می‌توان دایره‌ای در چهارضلعی محاط نمود، بنابراین داریم:

$$a + c = b + d$$

علاوه بر آن:

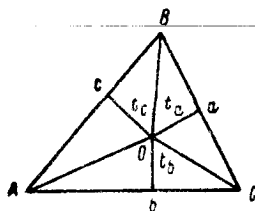
$$p - c = a; \quad p - d = b; \quad p - a = c; \quad p - b = d \quad (۱)$$

که در آن p عبارتست از نصف محیط چهارضلعی.
مساحت چهارضلعی محاطی چنین است:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

که پس از قراردادن مقادیر (۱) بدست می‌آید:

$$S = \sqrt{abcd}$$

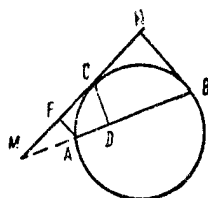


شکل ۹۲

۱۳۳۳. با توجه به شکل ۹۳ روشن است که سه مثلث DMC ، AMF و BHN متشابه‌اند، بنابراین :

$$\frac{AF}{CD} = \frac{MA}{MC} \quad (۱)$$

$$\frac{CD}{NB} = \frac{MC}{MB} \quad (۲)$$



از طرف دیگر داریم :

$$MC^2 = MA \cdot MB$$

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB} \quad (۳) \quad \text{و یا :}$$

با توجه به روابط (۱) و (۳) بدست می‌آید :

$$\frac{AF}{CD} = \frac{CD}{NB} \Rightarrow CD^2 = AF \times BN$$

و این همان رابطه‌ای است که می‌باید ثابت کنیم .

۱۳۳۴. در شکل ۹۴، AC ، AB ، AD ، BD و CF وترهایی از دایره و

ACF قطر آنست . طبق فرض زاویه AED قائمه است، زاویه ACF هم روبروی بقطر و قائمه است . علاوه بر آن داریم :

$$\widehat{ADC} = \widehat{AFC}$$

شکل ۹۴

(چون هر دو زوایای محاطی و روبروی به یک کمان‌اند) . بنابراین در دو مثلث AFC و ADE دو زاویه CAF و EAD برابر می‌شوند و از آنجا $CF = BD$ می‌شود .

داریم :

$$DE^2 + BE^2 = BD^2 = CF^2 ; \quad (۱)$$

$$AE^2 + EC^2 = AC^2 ; \quad (۲)$$

$$AC^2 + CF^2 = AF^2 ; \quad (۳)$$

باكمك روابط (۱) و (۲) و (۳) بدست مي آيد :

$$DE^2 + EC^2 + AE^2 + BE^2 = AF^2$$

۱۲۲۷. حجم فنجان چنين است (R را شعاع كره گرفته ايم) :

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3$$

وقتي كه آنرا به اندازه ۴۵ درجه كج كرده باشيم ، آب در قطعه اي از كره قرار مي گيرد كه حجم آن چنين است :

$$V_1 = \frac{\pi h^3}{3}(3R - h) ;$$

كه ارتفاع آن :

$$h = R - \frac{R}{\sqrt{2}}$$

و بنا بر اين خواهيم داشت :

$$V_1 = \frac{\pi R^3}{12}(3 - 2\sqrt{2})(4 + \sqrt{2})$$

و بنا بر اين :

$$\frac{V_1}{V} \times 100 = 11\frac{5}{8}\%$$

$$R\left(1 - \frac{2n}{m+n} \sin^2 \frac{\alpha}{4}\right) \quad : \text{جواب : ۱۲۲۸}$$

$$\frac{2\pi R^2 h}{R+h} \quad : \text{جواب : ۱۲۲۹}$$

۱۲۳۰. راهنمائي: از روش استقراء رياضي استفاده كنيد .

$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{n+1}{2}x + i \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \quad : \text{جواب : ۱۲۳۴}$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} ; \quad : \text{داريم : ۱۲۳۶}$$

$$\sin \frac{\alpha}{r} = r \sin \frac{\alpha}{r} \cos \frac{\alpha}{r} ;$$

.....

$$\sin \frac{\alpha}{r^{n-1}} = r \sin \frac{\alpha}{r^n} \cos \frac{\alpha}{r^n}$$

$$\sin \alpha = r^n \cos \frac{\alpha}{r} \cos \frac{\alpha}{r} \dots \cos \frac{\alpha}{r^n} \sin \frac{\alpha}{r^n}$$

و از آنجا :

$$\cos \frac{\alpha}{r} \cos \frac{\alpha}{r} \cos \frac{\alpha}{r} \dots \cos \frac{\alpha}{r^n} = \frac{\sin \alpha}{r^n \sin \frac{\alpha}{r^n}}$$

از طرف دیگر داریم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \sin \frac{\alpha}{r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\alpha}{r^n}}{\frac{\alpha}{r^n}} = \alpha ;$$

جواب : $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$

۴ اوراق امتحانی

§ ۲۲. مسائل ، قضایا و سئوالات مربوط به امتحانات شفاهی

۱۲۴۳. جواب : $a \times 1 = \frac{a}{1}$ و غیره.

۱۲۴۴. جواب : $\frac{1}{1} = \frac{1+a}{1+a} = 1$

۱۲۴۵. بعد از قریب ۲۴ سال (۲۳/۵ سال).

* ۱۲۷۶. اگر عدد را x بگیریم طبق فرض داریم :

$$12 + x^3 = 6x^2 + 35$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 35 = 0 \quad \text{و یا :}$$

این معادله بصورت زیر تجزیه می شود :

$$(x-5)(x^2 - x + 7) = 0 \Rightarrow x = 5$$

دو ریشه دیگر موهومی است .

۱۲۷۷. جواب : ۱۴۵

۱۲۷۸. جواب : هر دو را می توان به توان يك عدد رساند .

۱۲۷۹. راهنمایی :

$$\sqrt[3]{1} = x \Rightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x_1 = 1 ; x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

۱۲۸۰. داریم :

$$\frac{2 \times \frac{1}{3} \log_2 124}{2} \times 8^{\frac{1}{3}} = 124 \times 2 = 248$$

۱۲۸۷. تقسیم پاره خط به نسبت ذات وسط و طرفین (نسبت طلایی) به معنای تقسیم a به دو قطعه است بطوری که قطعه بزرگتر واسطه هندسی بین قطعه کوچکتر و تمام پاره خط باشد یعنی :

$$a : x = x : (a - x)$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \quad \text{یا :}$$

و ریشه مثبت این معادله چنین است :

$$x = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

این پاره خط را به طرق مختلف می توان ساخت ، مثلاً باین ترتیب : مثلث قائم الزاویه ABC را چنان می سازیم که اضلاع مجاور به زاویه قائمه آن $AB = a$ و $BC = 2a$ باشد ، اکنون اگر نیمساز AD را رسم کنیم ، پاره خط BD ، مساوی x ، یعنی پاره خط مجهول ما خواهد بود ، زیرا :

$$AC = a\sqrt{5} ;$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} ;$$

$$\frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{x}{2a - x} \quad \text{و یا :}$$

و مقدار x از این رابطه همان مقدار مورد نظر خواهد بود .

$$S = \frac{k^2 - c^2}{4} \quad \text{جواب : } ۱۲۹۳$$

۱۲۹۴. جواب : اگر $m > n$ باشد ، مساحت مثلث $\frac{m}{n}$ مرتبه بزرگ میشود .

اگر $m < n$ باشد ، مساحت مثلث $\frac{m}{n}$ مرتبه کوچک می شود .

$$۱۲۹۵. \text{ جواب : } \frac{S^2}{8}(3-2\sqrt{2})$$

*۱۲۹۷. اگر اضلاع مجاور به زاویه قائمه را x و y فرض کنیم ، طبق فرض مسئله باید داشته باشیم :

$$x+y=\frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow y=\frac{2x}{x-2}$$

این تساوی را می توان چنین نوشت :

$$y=2+\frac{4}{x-2}$$

برای اینکه y عددی صحیح باشد $x-2$ مقسوم علیهی از ۴ باشد :

$$x-2=1 \Rightarrow x=3 \quad (y=6)$$

$$x-2=2 \Rightarrow x=4 \quad (y=4)$$

$$x-2=4 \Rightarrow x=6 \quad (y=3)$$

(مقسوم علیه های منفی $x-2$ منجر به جوابهای منفی برای y می شود) .

جواب : ۳ و ۶ یا ۴ و ۴ .

۱۲۹۸. اضلاع مثلث را به ترتیب x ، $x+1$ و $x+2$ و مساحت آنرا

$x+3$ می گیریم ، بدست می آید :

$$\sqrt{2(x+1)(x+3)(x+1)(x-1)} = 4(x+3)$$

$$3x^2 + 3x^2 - 19x - 51 = 0 \quad \text{و یا :}$$

$$(x-3)(3x^2 + 12x + 17) = 0$$

از آنجا : $x_1 = 3$ بدست می آید (x_2 و x_3 موهومی اند) .

جواب : $a=3$ ، $b=4$ ، $c=5$ و $S=6$.

$$P=2\sqrt{2S\sqrt{3}} \quad \text{جواب : } ۱۲۹۹$$

۱۳۰۹. جواب : ۱۸۰ درجه .

۱۳۱۰. جواب : ۱۰۵ درجه .

$$۱۳۱۱. \text{ جواب : } \sqrt{ab} : \frac{a+b}{2}$$

$$۱۳۱۲. \text{ جواب : } S = \frac{nl^2}{2(n+1)^2}$$

$$۱۳۱۳. \text{ جواب : } \frac{3-\sqrt{5}}{2} \pi R^2$$

$$۱۳۱۵. \text{ جواب : } 9cm, 7cm, 5cm$$

$$۱۳۱۶. \text{ جواب : } a\sqrt{1-\frac{b^2}{4}} + b\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

$$۱۳۱۸. \text{ جواب : } \frac{5}{6}a^2$$

$$۱۳۱۹. \text{ جواب : } \frac{1}{6}a^2$$

$$۱۳۲۰. \text{ جواب : }$$

$$\frac{Vn^2}{m^2+n^2+p^2} : \frac{Vm^2}{m^2+n^2+p^2} :$$

$$\frac{Vp^2}{m^2+n^2+p^2}$$

$$۱۳۲۱. \text{ جواب : } 12\sqrt{3}r^2$$

$$۱۳۲۲. \text{ جواب : } 8R^2$$

$$۱۳۲۳. \text{ جواب : } \sqrt{3} : \sqrt{2}$$

$$۱۳۲۵. \text{ جواب : } \frac{\pi R^2}{8\sqrt{3}}$$